תורת הגלים להנדסה רפואית

בשביל התירגול

תוכן העניינים

תורת הגלים להנדסה רפואית

פרק 1 - מודים עצמיים

תוכן העניינים

הרצאות ותרגילים – מערכת של שתי מסות

שאלות

1) מסה מחוברת למסה שמחוברת לתקרה

מסה m מחוברת לתקרה באמצעות קפיץ אנכי בעל קבוע 2k . מסה m נוספת מחוברת למסה הראשונה באמצעות קפיץ אנכי נוסף בעל קבוע k . המסות זזות רק בציר האנכי.

א. הסבירו מדוע ניתן להתעלם מכוח הכובד בבעיה זאת, כאשר אנו באים למצוא את התדירויות העצמיות ואת אופני התנודה.

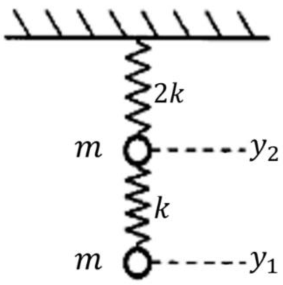
ב. כתבו את מערכת המשוואות בצורה מטריציונית ומצאו את התדירויות העצמיות.

ג. מצאו את אופני התנודה, ותארו אותם.

ד. בזמן $t=0$ נותנים מכה קטנה למסה התחתונה, כך שהיא מקבלת מהירות התחלתית v_0.

מצאו את תנועת המסות כתלות זמן.

רמז: במקרה זה יהיה יותר פשוט לפרוש את תנאֵי ההתחלה כאשר הפתרון רשום באמצעות סכום של סינוסים וקוסינוסים.



תשובות סופיות

1) א. כוח הכובד הוא כוח קבוע. כוחות קבועים מתבטלים על ידי תוספת קבועה של מתיחה לקפיץ. לכן, כוחות קבועים משנים רק את נקודת שיווי המשקל ואינם משפיעים על התדירויות או על אופני התנודה.

ב. $w_{1,2}=\pm\sqrt{2+\sqrt{2}}w_0,\quad w_{3,4}=\pm\sqrt{2-\sqrt{2}}w_0$

ג. $v_1=\begin{pmatrix}1\\-2.41\end{pmatrix},\quad v_2=\begin{pmatrix}1\\0.41\end{pmatrix}$

ד. $$\begin{pmatrix}y_1(t)\\y_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0.63\\-1.52\end{pmatrix}\cdot\frac{v_0}{w_0}\sin\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}w_0t\right)+\begin{pmatrix}0.9\\0.37\end{pmatrix}\cdot\frac{v_0}{w_0}\sin\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}t\right)$$

$$w_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

תורת הגלים להנדסה רפואית

פרק 2 - אנליזת פורייה

תוכן העניינים

אנליזת פורייה

טורי פורייה

רקע

$$f(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)+B_n\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)\right]$$

כאשר L הוא המחזור של הפונקציה (אפשרי גם שהמחזור של הפונקציה יהיה קטן מ L אבל לא גדול ממנו).

הפונקציה צריכה להיות מחזורית ובמרחב L_2 .

$$A_0=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx$$

$$A_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx$$

$$B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)dx$$

מכפלה פנימית

$$\int_0^L f(x)g(x)\,dx$$

פונקציות אורתוגונליות

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)dx=0$$

$$\int_0^L \cos\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi mx}{L}\right)dx=\frac{L}{2}\delta_{nm}$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi nx}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi mx}{L}\right)dx=\frac{L}{2}\delta_{nm}$$

אפשר לתאר באמצעות אותן נוסחאות של טור פורייה גם קטע מתוך פונקציה שאינה מחזורית או פונקציה המוגבלת לתחום מסוים. צריך לזכור שהטור מתאר רק את הקטע המסוים ובשאר המרחב הוא מתאר שכפול של הקטע ולא את הפונקציה המקורית.

טור סינוסים וקוסינוסים לתיאור פונקציה בקטע סופי

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

$$B_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)dx$$

$$f(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

$$A_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)dx$$

טור אקספוננטים :

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}C_n e^{i\frac{2\pi n}{L}x}$$

$$C_0=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx$$

$$C_n=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)e^{-i\frac{2\pi n}{L}x}dx$$

הקשר בין המקדמים בטור אקספוננטים לטור סינוסים וקוסינוסים :

$B_n=i(C_n-C_{-n})$	$A_n=C_n+C_{-n}$
$C_{-n}=\frac{1}{2}(B_n+iA_n)$	$C_n=\frac{1}{2}(B_n-iA_n)$

$$\frac{A_0}{2}=C_0$$

תופעת גיבס :

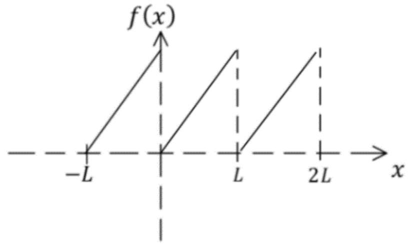
- קרוב לנקודת האי רציפות של הפונקציה המקורית. נראה תנודתיות בפונקציה המתוארת על ידי הטור. תנודתיות זו הולכת וקטנה ככל שמספר האיברים בטור גדל והיא נעלמת לגמרי עבור אינסוף איברים.
- בנקודת אי הרציפות אנחנו נראה סטייה של 0.9% מערך הקפיצה בפונקציה, סטייה זו היא קבועה ואינה קטנה ככל שמגדילים את מספר האיברים (החל ממספר איברים מסוים)

שאלות

1) דוגמה - פונקציית מסור

מצאו את טור פורייה עבור פונקציית מסור:

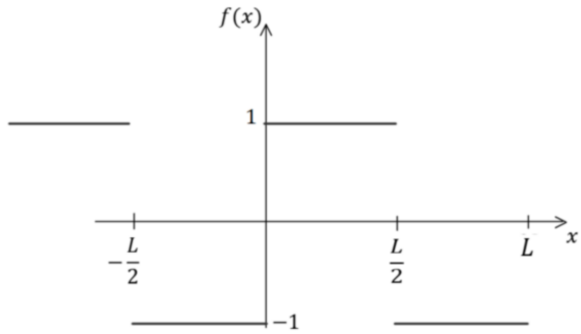
$f(x)=Ax$ כאשר $0\le x<L$ ובעלת מחזור L . A קבוע נתון.



2) דוגמה - פונקציית סימן

מצאו את המקדמים של טור פורייה של הפונקציה $f(x)$ השווה לפונקציית סימן $sign(x)$, בתחום $-\frac{L}{2}\le x\le\frac{L}{2}$ ובעלת מחזור L. ציירו באמצעות מחשב את המקרה של $N=1$, $N=3$, $N=10$ ו- $N=50$ עבור $L=1$

$$sign(x)=\begin{cases}1, & x\ge 0\\ -1, & x<0\end{cases}$$



3) תרגיל - פונקציית משולש

נתונה פונקציית משולש

$$\mathrm{f}(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le\frac{L}{2}\\ L-x, & \frac{L}{2}\le x\le L\end{cases}$$

המוגדרת בתחום $0\le x\le L$

א. כתבו את הפונקציה כטור פורייה של קוסינוסים וסינוסים.

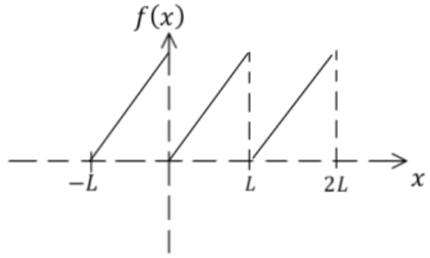
ב. כתבו את הפונקציה כטור סינוסים.

ג. כתבו את הפונקציה כטור קוסינוסים.

ד. הראו כי התוצאה של סעיף ג' מתלכדת עם התוצאה של סעיף א' והסבירו מדוע.

4) תרגיל - פונקציית מסור עם אקספוננטים

א. מצאו את טור אקספוננטים עבור פונקצית המסור מהדוגמה בתחילת הפרק: $f(x) = Ax$ כאשר $0 \le x < L$ ובעלת מחזור L. A קבוע נתון.



ב. מצאו את המקדמים של טור סינוסים וקוסינוסים באמצעות המקדמים שמצאתם בסעיף א' והראו שהתשובה זהה לתשובה שקיבלנו בדוגמה של תחילת בפרק.

5) תרגיל - פונקציה לינארית בתחומים שונים

מצאו את טור פורייה של הפונקציה $f(x) = x$ בתחומים הבאים:

א. $[0,2\pi]$

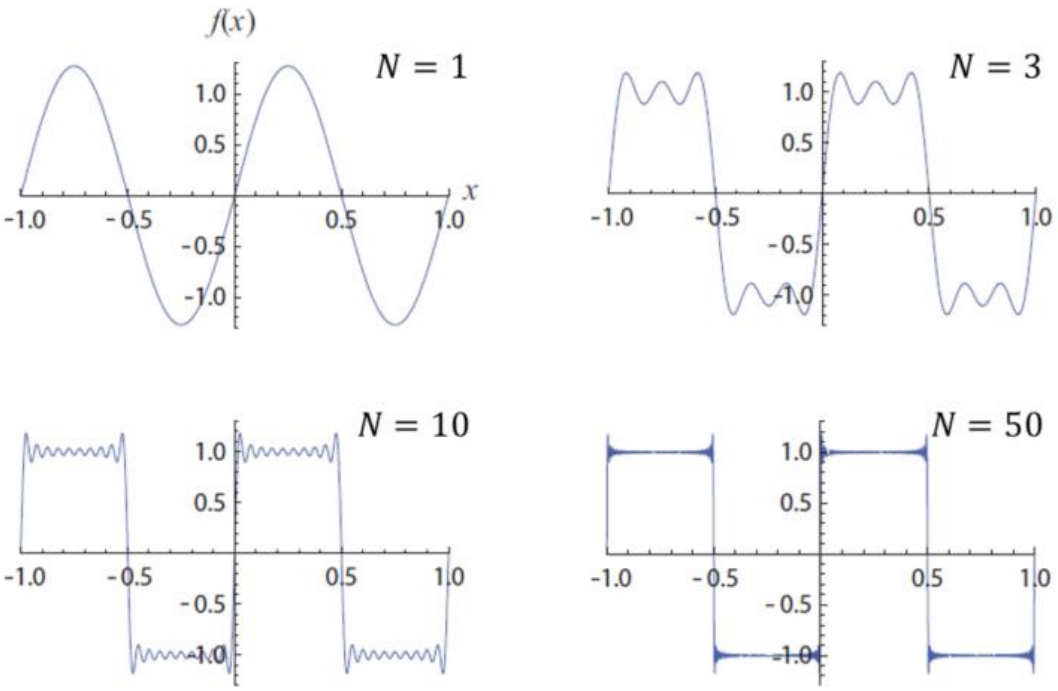
ב. $[-\pi,\pi]$

ג. $[0,4\pi]$

תשובות סופיות

1) $f(x)=\frac{AL}{2}+\sum_{n=n}^{\infty}-\frac{AL}{\pi n}\sin\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)$

2) $A_n=0$ לכל n ; $B_n=\begin{cases}\frac{4}{\pi n} & n\text{ odd}\\ 0 & n\text{ even}\end{cases}$.



3) א. $f(x)=\frac{L}{4}-\sum_{n=1,\text{ odd}}^{\infty}\frac{2L}{\pi^2n^2}\cos\left(\frac{2\pi n}{L}x\right)$

ב. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4L}{\pi^2n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$

ג. $f(x)=\frac{L}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2L}{\pi^2n^2}\left(2\cos\left(\frac{\pi n}{2}\right)-1-(-1)^n\right)\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$

ד. כי שכפול הפונקציה על מחזור L נותן פונקציה זוגית.

4) א. $f(x)=\frac{AL}{2}+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{iLA}{2\pi n}e^{i\frac{2\pi n}{L}x}$

ב. $A_0=AL,\ A_n=0,\ B_n=-\frac{LA}{\pi n}$

5) א. $f(x)=\pi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\sin(nx)$

ב. $f(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^n\sin(nx)$

ג. $f(x)=2\pi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n}\sin\left(\frac{n}{2}x\right)$

התמרת (טרנספורם) פורייה

<u>רקע</u>

התמרת (טרנספורם) פורייה

$$F(k)=FT[f(x)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\mathrm{e}^{-ikx}\,\mathrm{d}x$$

התמרה הפוכה

$$f(\mathrm{x})=\int_{-\infty}^{\infty}F(k)\mathrm{e}^{ikx}\,\mathrm{d}x$$

<u>תכונות</u>:

1. לינאריות: $\mathrm{FT}[\alpha \mathrm{f(x)}+\beta \mathrm{g(x)}]=\alpha \mathrm{FT}[\mathrm{f(x)}]+\beta \mathrm{FT}[\mathrm{g(x)}]$

אם $\int_{-\infty}^{\infty}|\mathrm{f(x)}|\,\mathrm{dx}\neq\infty$ אז $\mathrm{f(x)}\in G$

- אם $\mathrm{f(x)}\in G$ אז $\mathrm{F(k)}$ רציפה
- אם $\mathrm{f(x)}\in G$ אז $\lim_{k\to\pm\infty}\mathrm{F(k)}=0$ רימן, - לבג
- אם $\mathrm{f(x)}$ זוגית אז $\mathrm{F(k)}=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{f(x)}\cos(\mathrm{kx})\,\mathrm{dx}$
- אם $\mathrm{f(x)}$ אי-זוגית אז $\mathrm{F(k)}=-\frac{i}{\pi}\int_0^{\infty}\mathrm{f(x)}\sin(\mathrm{kx})\,\mathrm{dx}$
- אם $\mathrm{f(x)}$ ממשית אז $\overline{\mathrm{F(k)}}=\mathrm{F(-k)}$

<u>התמרות של פונקציות מיוחדות</u>:

גאוסיאן

$$FT\left[A\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\right]=\frac{A\mathrm{e}^{-\frac{k^2}{4\alpha}}}{2\sqrt{\pi\alpha}}$$

אקספוננט

$$FT\left[Ae^{-\alpha|x|}\right]=\frac{\alpha A}{\pi(\alpha^2+k^2)}$$

לורנציאן

$$FT\left[\frac{\alpha}{\alpha^2+x^2}\right]=\frac{1}{2}e^{-\alpha|k|}$$

פונקציית דלתא

$$FT[\delta(x)]=\frac{1}{2\pi}$$

קבוע

$$FT[1]=\delta(k)$$

<u>נוסחת הכפל באקספוננט , קוסינוס או סינוס (מודולציה) :</u>

$$FT\left[f(x)e^{iCx}\right]=F(k-C)$$

$$FT[f(x)\cos(Cx)]=\frac{F(k-C)+F(k+C)}{2}$$

$$FT[f(x)\sin(Cx)]=\frac{F(k-C)-F(k+C)}{2i}$$

<u>נוסחת הכיווץ והזזה :</u>

$$FT[f(ax+b)]=\frac{1}{|a|}e^{i\frac{kb}{a}}F\left(\frac{k}{a}\right)$$

<u>נוסחת הנגזרת :</u>

אם $f(x),f'(x)\in G$ ו - $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=0$ אז:

$$FT\left[f'(x)\right]=ikF(k)$$

<u>נוסחת המומנט :</u>

אם $xf(x)\in G$ אז $F(k)$ גזירה ברציפות ו - $FT[xf(x)]=i\frac{d}{dk}F(k)$

שאלות

1) דוגמה - אקספוננט עם פונקציית טטה

חשבון את התמרת פורייה של הפונקציה:

$f(x) = Ae^{-ax}\theta(x)$

כאשר $\theta(x)$ היא פונקציית Heaviside המוגדרת לפי: $\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$

2) דוגמה - פונקציית חלון

חשבון את התמרת פורייה של פונקציית חלון המוגדרת לפי:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

3) דוגמה - חלון מורחב

חשבון את התמרת פורייה של פונקציית חלון מורחב המוגדרת לפי:

$f(x) = \begin{cases} 1, & -\mathrm{r} \leq x \leq r \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$, כאשר $r > 0$.

4) תרגיל - נגזרת של לורנציאן

השתמשו בנוסחת הנגזרת ומצאו את התמרת פוריה של הפונקציה $f(x) = \frac{x}{(x^2+\alpha^2)^2}$.

5) תרגיל - חלון כפול איקס

השתמשו בנוסחת המומנט וחשבו את התמרת פורייה של הפונקציה:

$f(x) = \begin{cases} \mathrm{x}, & -1 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$.

6) תרגיל - גאוסיאן כפול איקס בריבוע

מצאו את התמרת פורייה של הפונקציה $f(x) = x^2 \mathrm{e}^{-\alpha x^2}$.

7) תרגיל - משוואה עם נגזרת ראשונה

פתרו את המשוואה הבאה $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}} q(t) + bq(t) = f_0 \mathrm{e}^{-at}\theta(t)$.

כלומר מצאו את $q(t)$ באופן מפורש עבור $a, b > 0$.

רמז: מצאו את הפירוק לשברים חלקיים לפי הדרך הבאה

$$\frac{1}{(x+b)(x+a)} = \frac{A}{x+b} + \frac{B}{x+a}$$

תשובות סופיות

1) $\dfrac{A}{2\pi(a+ik)}$

2) $\dfrac{1}{\pi}\sin c(k)$

3) $\dfrac{\sin(rk)}{\pi k}$

4) $\dfrac{-ik}{4\alpha}e^{-\alpha(k)}$

5) $\dfrac{i}{\pi}\left(\dfrac{k\cos k-1\cdot\sin k}{k^2}\right)$

6) $\dfrac{e^{-\frac{k^2}{4\alpha}}}{4\sqrt{\pi\alpha^3}}\left(1-\dfrac{k^2}{2\alpha}\right)$

7) $q(t)=\dfrac{1}{b-a}f_0\left(e^{-at}-e^{-bt}\right)\theta(t)+Ce^{-bt}$

תורת הגלים להנדסה רפואית

פרק 3 - מבוא לגלים

תוכן העניינים

הרצאות ותרגילים – מבוא לגלים

סוגי גלים ותאור גלים

רקע:

גל - הפרעה שמתקדמת במרחב

גלים רוחביים - גלים שבהם ההפרעה היא בכיוון ניצב להתקדמות הגל (מיתר מים)

גלים אורכיים - גלים שבהם ההפרעה היא בכיוון מקביל להתקדמות הגל (קול)

תווך - החומר שבו מתקדמת ההפרעה

פונקציית הגל - פונקציה שמתארת את ההפרעה כתלות בזמן ובמרחב. פונקציית הגל צריכה להיות פונקציה מהצורה $f(x \pm vt)$, כאשר v היא מהירות הגל.

יש להבחין בין מהירות התקדמות הגל למהירות של החלקיקים בחומר!

אמפליטודה (משרעת) - הערך המרבי של ההפרעה בגל (בדר"כ מסומנת באות A).

אנרגיה של גל - $E \propto A^2$

משוואת הגלים

רקע:

משוואת הגלים במימד אחד: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$

כל פונקציה מהצורה $f(x \pm vt)$ היא פתרון של משוואת הגלים. סכום של שני פתרונות מהווה גם פתרון אם לשני הפתרונות אותה מהירות גל.

שאלות

1) **תרגיל** - קוסינוס בשלישית
האם הפונקציה $y(x,t) = A\cos^3(ax+bt)$ מהווה פתרון של משוואת הגלים?
במידה וקיים תנאי, פרטו את התנאי, מצאו את מהירות הגל ואת כיוון תנועתו.

2) **תרגיל** - סכום של שתי פונקציות
האם הפונקציה $y(x,t) = f(x-at) + g(x+bt)$ מהווה פתרון למשוואת הגלים?
במידה וקיים תנאי, פרטו את התנאי, מצאו את מהירות הגל ואת כיוון תנועתו.

3) האם הפונקציות הבאות הן פתרון של משוואת הגלים?

א. $y(x,t)=0.005sin(20x-660t)+0.009e^{(x+33t)}$

ב. $y(x,t)=0.005\sin(20x-660t)+0.005\cos(x+32t)$

4) תרגיל - חקירת פונקציה

נתונה הפונקציה $f(x)=\dfrac{4}{3x^2+1}$.

א. שרטטו איכותית את צורת הפונקציה.

ב. רשמו ביטוי לגל בעל פרופיל זה, אשר נע בכיוון השלילי של ציר ה- x, במהירות $v=4\dfrac{\text{m}}{\text{sec}}$, בהנחה שברגע $t=0$ מתקיים $\psi(x,0)=f(x)$.

ג. חשבו, ישירות מהביטוי שמצאתם בסעיף הקודם, היכן נמצא המקסימום של הגל ברגע $t_1=4\text{sec}$ וברגע $t_2=5\text{sec}$.

ד. שרטטו איכותית את צורת הגל ברגע $t=2$.

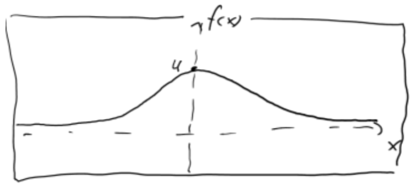
תשובות סופיות

1) $\dfrac{b}{a}$, בכיוון השלילי של ציר ה- x.

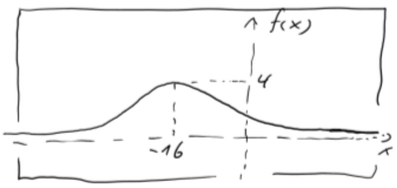
2) $Y(x,t)$ מהווה פתרון רק אם $a=\pm b$ ואז מהירות הגל היא a.
לתנאים ראו בסרטון.

3) א. כן. ב. לא.

4) א.



ד.



ב. $=4(x,t)\dfrac{4}{3(x+4t)^2+1}$ ג. $-16,\ -20$

תכונות ותופעות בגלים

רקע:

התאבכות - סכימה של גלים שנפגשים

חזית גל - אוסף הנקודות המגיעות לשיא באותו זמן

גלים הרמוניים

רקע:

גל מחזורי - גל שמכיל מקטע שחוזר על עצמו

אורך הגל - אורך הקטע שחוזר, מסומן ב- λ (בדר"כ נמדד ע"י המרחק בין שיא לשיא)

זמן המחזור - הזמן שלוקח לגל לעשות מחזור שלם, מסומן ב-T, $\lambda = v \cdot T$.

תדירות - מספר המחזורים בשנייה , מסומנת ב- f , $f = \frac{1}{T}$.

גל הרמוני - פונקציית קוסינוס או סינוס, $y(x,t) = A\cos(kx \pm \omega t + \varphi)$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

מספר הגל - k, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

$$\omega = v \cdot k$$

גל עומד

<u>מאפיינים</u>:

1. נקודות צומת- נקודות שלא זזות - node
2. אין מהירות גל
3. נקודת טבור - נקודות שבהן האמפליטודה מקסימאלית -antinode
4. מורכב משני גלים נעים זהים הנעים בכיוונים מנוגדים

משוואת גל עומד היא מהצורה

$$y(x,t) = A\sin(kx)\cos(\omega t + \varphi) = \frac{A}{2}\sin(kx - (\omega t + \varphi)) + \frac{A}{2}\sin(kx + (\omega t + \varphi))$$

שאלות

1) תרגיל - חישוב ערכים בסיסיים בגל במיתר

במיתר נע גל $y(x,t)=2\cos(500t-0.2x)$.

א. חשבו את האמפליטודה, התדר הזוויתי (ω), התדר (f), מספר הגל (k), אורך הגל (λ) ומהירות הגלים.

ב. באותו מיתר קיים גל $y(x,t)=2\sin(500t-0.2x)+2\sin(500t-0.2x+0.6)$. על ידי שימוש בזהות של סכום סינוסים, קבלו את הגל השקול. מה מתאר גל זה?

2) תרגיל - חישוב תדירויות ואורכי גל של גל א"מ

אורך הגל של אור כתום הוא $\lambda=605\text{nm}$.

א. כמה מחזורים של הגל ניתן להכניס לעובי של נייר $(D=0.08\text{mm})$?

ב. איזה מרחק יכסו אותו מספר מחזורים שמצאתם בסעיף א, אם מדובר בגלי מיקרו בעלי תדירות של $f=10^{10}\text{Hz}$?

גלי מיקרו נעים במהירות האור, $c=310^{8}\dfrac{\text{m}}{\text{sec}}$.

ג. מהי מהירות הקול בגוש ברזל, אם מתפשט בו גל בתדירות $f=5\cdot10^{7}\text{Hz}$, עם אורך גל של $\lambda=9\cdot10^{-5}\text{m}$?

3) תרגיל – סכום של N גלים עם הפרשי פאזה ומספרים מורכבים**

נתבונן ב- N גלים מהצורה $A\cos(kx-\omega t)$, כאשר בין גל לגל הפרש פאזה $\Delta\phi$, כלומר הגל ה- n הינו $A\cos(kx-\omega t+n\Delta\phi)$.

א. הראו שסכום הגלים, $\sum_{n=1}^{N}A\cos(kx-\omega t+n\Delta\phi)$, שקול לגל יחיד עם אותם ערכי ω ו- k, ומצאו את האמפליטודה והפאזה שלו. היעזרו בכתיב מרוכב.

ב. עבור אילו ערכי $\Delta\phi$ מתקבלת אמפליטודה מקסימלית ומינימלית?

4) תרגיל – סכום גלים עם הפרשי תדירויות

נתונים N גלים התלויים בזמן כך שקיים הפרש תדירות קבוע בין כל שני גלים $\delta\omega$. כלומר הגל ה- n הוא מהצורה: $A\cos(\omega_0 t+n\delta\omega t)$.

א. השתמשו בתוצאה של התרגיל הקודם ומצאו את סכום הגלים מ- $n=0$ ועד $n=N-1$.

ב. הראו שעבור $N=2$ מתקבלת התוצאה של חיבור שני גלים שראינו בסרטון ההרצאה.

תשובות סופיות

1) א. $A=2m,\ \omega 500\frac{\text{rad}}{\text{sec}},\ \ f=79.6\,\text{Hz},\ k=0.2\frac{1}{m},\ \ \lambda=10\pi m,\ \ v=2500\frac{\text{m}}{\text{s}}$

ב. $-3.3\sin\left(0.4x-1000t\right)$, גל סינוס עם פאזה של π בתדירות כפולה ואורך גל כפול ואמפליטודה של 3.3.

2) א. 130. ב. $\frac{3}{9}\text{m}$ ג. $4500\frac{\text{m}}{\text{s}}$

3) א. אמפליטודה $\tilde{A}=A\frac{\sin\left(\frac{N\Delta\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}$; פאזה $\tilde{\varphi}=\frac{N+1}{2}\Delta\phi$.

ב. האמפליטודה המקסימלית היא NA והיא מתקבלת כש- $\Delta\ell=2\pi l,\ \ l=0,1,2$.

האמפליטודה המינימלית היא אפס והיא מתקבלת עבור $\Delta\phi=\frac{2\pi k}{N}$,

כאשר $\frac{k}{N}$ לא שלם.

4) א. $A\frac{\sin\left(N\frac{\delta\omega t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\delta\omega t}{2}\right)}\cos\left(\omega_0 t+\frac{N-1}{2}\delta\omega t\right)$ ב. ראו בסרטון.

תורת הגלים להנדסה רפואית

פרק 4 - גלים רוחביים במיתר

תוכן העניינים

גלים רוחביים במיתר

משוואת הגלים במיתר

משוואת הגלים היא $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$, כאשר

T – המתיחות במיתר

ρ – צפיפות המסה ליחידת אורך

ψ – פונקציית הגל, מתארת את התנועה הרוחבית של כל חתיכה במיתר.

מהירות הגל היא $v=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$.

פתרון המשוואה:

$$\psi(x,t)=A\cos(kx-\omega t)+B\sin(kx-\omega t)+C\cos(kx-\omega t)+D\sin(kx-\omega t)$$

יחס הדיספרסיה: $\omega=v\cdot k$.

אפשרויות נוספות לפתרון (על ידי שימוש בזהויות טריגונומטריות)

$$\psi(x,t)=A_1\cos(kx-\omega t+\phi_1)+A_2\cos(kx-\omega t+\phi_2)=$$
$$B_1\cos kx\cos\omega t+B_2\cos kx\sin\omega t+B_3\sin kx\cos\omega t+B_4\sin kx\sin\omega t=$$
$$C_1\cos kx\cos(\omega t+\phi_1)+C_2\sin kx\cos(\omega t+\phi_2)$$

שתי האפשרויות האחרונות עדיפות לגלים עומדים.

פתרון במספרים מרוכבים

$$\psi(x,t)=A_1e^{i(kx+\omega t)}+A_2e^{i(kx-\omega t)}+A_3e^{-i(kx+\omega t)}+A_4e^{-i(kx-\omega t)}$$

אם הפונקציה ממשית, אז $A_3=A_1^*$ ו- $A_4=A_2^*$, והפתרון מתכנס לחלק הממשי של

$$\psi(x,t)=Ae^{i(kx-\omega t)}+Be^{-i(kx+\omega t)}$$

שאלות

1) תרגיל – סטודנטית מודדת את כוח הכובד

סטודנטית רוצה למדוד את תאוצת כוח הכבידה (g) המקומי, הסטודנטית תולה חוט אנכי ומחברת אליו משקולת בעלת מסה $M=2\text{kg}$.
נתון שלחבל יש מסה של $m=5\text{gr}$ (ניתן להניח התפלגות אחידה) ואורך של $l=1.2\text{m}$. הסטודנטית שולחת מספר פולסים לאורך החבל ומודדת שהזמן הממוצע שלוקח לפולס להגיע מקצה לקצה הוא $t=17.5\text{ms}$ (מילי שניות).
חשבו את g (ניתן להזניח את משקל החוט ולהשתמש רק במשקל המשקולת, כאשר מחשבים את המתיחות בו).

2) תרגיל - גל קוסינוס מעורר במיתר

צפיפות המסה הקווית במיתר היא $1.2\times10^{-4}\,\frac{\text{kg}}{\text{m}}$, במיתר מעורר גל מהצורה:
$\psi(x,t)=0.005\cos(3x-90t)$.
חשבו את מהירות הגלים במיתר, את המתיחות ואת המהירות המקסימלית בכיוון רוחבי של נקודה כלשהיא במיתר. הניחו יחידות סטנדרטיות.

3) תרגיל - גל סינוס מתקדם במיתר

נתון גל סינוס המתקדם במיתר.

א. כתבו פונקציה שתתאר גל סינוס הנע על מיתר בכיוון החיובי של ציר ה-x, בעל זמן מחזור של 5 שניות, מהירות של 20 מטר לשנייה ואמפליטודה של 6 מילימטר.

ב. רשמו ביטוי לתאוצה של כל אלמנט מסה במיתר.

ג. איפה נמצאים אלמנטי המסה במיתר בעלי התאוצה הגדולה ביותר (בערך מוחלט) בזמן $t=3\text{sec}$?

ד. עבור אילו זמנים התאוצה של אלמנט המסה בנקודה $x=2\text{cm}$ היא הנמוכה ביותר (בערך מוחלט)?

ה. מקטינים את התדירות f של הגל, תארו כיצד ישתנו מהירות אלמנט מסה במיתר, מהירות הגל ואורך הגל?

4) תרגיל – פונקציה ריבועית

נתונה פונקציה $y(x,t)=32x^2+128t^2$. הניחו יחידות סטנדרטיות.

א. הראו שפונקציה זו היא פתרון של משוואת הגלים במיתר.
הדרכה: נסו לרשום את הפונקציה כצירוף של פונקציות, אשר כל אחת מהן מתארת גל במיתר.

ב. מהי מהירות הגלים במיתר זה.

ג. נתון שצפיפות המסה ליחידת אורל של המיתר היא $0.03\frac{\text{kg}}{m}$ חשבו את מתיחותו.

ד. האם הפונקציה $\sqrt{32x^2+128t^2}$ היא גם פתרון של משוואת הגלים?

5) תרגיל – מיתר בתווך צמיג *

מיתר בעל מתיחות T וצפיפות ρ נמצא בתוך תווך צמיג, כך שכוח החיכוך שפועל על אלמנט אורך dx, הוא $F=-bdx\frac{\partial\Psi}{\partial t}$ כאשר b פרמטר נתון.

א. מצאו משוואה המתארת תנודות קטנות של המיתר (משוואת הגלים).

ב. מצאו את אופני התנודה של המערכת, כלומר פתרונות בהם בכל נקודה x תהיה אותה תלות זמנית. הניחו ריסון חלש.
הדרכה: הציבו פתרון מופרד משתנים $\Psi(x,t)=X(x)f(t)$ וזהו כי המשוואה עבור $f(t)$ היא משוואה של מתנד הרמוני מרוסן, מהו Γ במקרה הזה?

ג. נתון שבזמן $t=0$ צורת המיתר היא $\Psi(x,t=0)=a\cos(k_0x)$ ושהמהירות ההתחלתית היא אפס. מצאו את צורת המיתר בזמן $t>0$.

תשובות סופיות

1) $9.8\frac{\text{m}}{\text{s}}$

2) $30\frac{\text{m}}{\text{s}};\ 0.102\text{N};\ 0.45\frac{\text{m}}{\text{s}}$

3) א. $y(x,t)=0.006_m\sin\left(\frac{\pi}{50}x-\frac{2\pi}{5}t\right)$ ב. $a(x,t)=0.00096\pi^2\sin\left(\frac{\pi}{50}x-\frac{2\pi}{5}t\right)$

ג. $x=85_m+50n$, כאשר n מספר שלם בין מינוס אינסוף לאינסוף.

ד. $t=0.001_s-2.5_s n$

ה. מהירות אלמנט מסה במיתר קטנה, מהירות הגל לא משתנה ואורך הגל גדל.

4) א. $y(x,t)=(4x+8t)^2+(4x-8t)^2$ ב. $2\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ג. 0.12N ד. לא.

5) א. $\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{b}{T}\frac{\partial\psi}{2t}+\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$

ב. $\psi(x,t)=\left[A\cos(kx)+B\sin(kx)\right]e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left[\cos(\omega t)2C\sin(\omega t)\right]$, כאשר $\Gamma=\frac{b}{\rho}$.

ג. $\psi(x,t)=a\cos(k_0x)e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\left[\cos(\omega t)\frac{\Gamma}{2\omega}\sin(\omega t)\right]$, כאשר $\omega=\sqrt{\frac{k_0^2T}{\rho}-\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}$.

פתרון באמצעות נוסחת ד'אלמבר

רקע

$$\psi(x,t)=\frac{1}{2}\left[\psi(x-vt,0)+\psi(x+vt,0)\right]+\frac{1}{2v}\int_{x-vt}^{x+vt}\dot{\psi}(x',0)dx'$$

שאלות

1) תרגיל – גל נע שמאלה וגל במנוחה

למיתר בעל צפיפות מסה $\rho_0 = 0.2\,\frac{\text{kg}}{m}$ יש מתיחות $T = 0.8\,N$. ברגע $t = 0$ צורת המיתר היא $\Psi(x,0) = 0.4\,sin(20x)$. במיתר נע גל בכיוון החיובי של ציר ה-x

א. רשמו ביטוי עבור פונקציית הגל בכל רגע, $\Psi(x,t)$.

ב. מהם האמפליטודה , אורך הגל, מספר הגל, התדירות וזמן המחזור של הגל?

ג. כיצד ישתנו התשובות לסעיפים א-ב, אם במקום שיהיה נתון שהגל מתקדם בכיוון החיובי, נתון שבזמן $t = 0$ המיתר נמצא במנוחה בכל מקום?

2) תרגיל – מציאת פונקציית גל מתנאי התחלה

במיתר אינסופי מסוים, מהירות הגלים היא $15\,\frac{m}{\text{sec}}$, ברגע $t = 0$ נתון ש-

$\Psi(x,0) = |x|e^{-\frac{|x|}{b}}$ וכן $\left.\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right|_{t=0} = a\frac{x}{b}e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^2}$, כאשר a , b קבועים נתונים.

מצאו את $\Psi(x,t)$.

3) תרגיל – בניית פונקציית גל

נתון מיתר ובו מהירות הגלים היא $v = 120\,\frac{m}{\text{sec}}$. הגל במיתר הוא $\Psi(x,t) = f(x-vt) + g(x+vt)$. נתון גם כי $g(y) = 2f(y) + 0.001\,sin(5y)$,
וגם שברגע $t = 0$, $\Psi(x,0) = 0.002\,sin(5x) - 0.003x$.

הניחו יחידות סטנדרטיות ומצאו את:

א. פונקציית הגל בכל מיקום וזמן.

ב. מהירות חתיכה של המיתר הנמצאת במיקום $x = 0.8\,m$, וברגע $t = 0.2\,sec$?

נספח: פתרון עם תנאי שפה התלויים בזמן

אם נתונה הפונקציה של הקצה כתלות בזמן (נסמנה ב $f(t)$) אז הגל שנוצר ממנה יהיה:

$$\Psi(x,t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right)$$

במקרה של כוח התלוי בזמן שפועל על קצה $F_D(t)$ (ואין גל שנע בכיוון השלילי)

$$f(t) = \frac{v}{T}\int F_0(t)\,dt$$

4) תרגיל – מנוע מייצר גל

צפיפות המסה של מיתר חצי אינסופי היא $\rho = 0.012\frac{\text{kg}}{m}$ והמתיחות שלו היא $520N$. בקצה $x=0$ ישנו מקור גלים (מנוע) המאלץ את הנקודה הזו לנוע באופן $b\left(1 - e^{-\alpha t^2}\right)$ כאשר $b = 5\text{cm}$ ו- α קבוע מסוים. ברגע $t = 0$ המיתר נמצא בשיווי משקל בכל מקום והמקור מתחיל לפעול. המקור יוצר גל, הנע בכיוון החיובי של ציר ה $x-$. נתון שברגע $t = 0.2sec$ סטיית המיתר משיווי משקל בנקודה $x = 15m$ היא $4cm$.

א. קבלו ביטוי לפונקציית הגל בכל רגע ומקום, $\Psi(x,t)$.

ב. חשבו את ערכו המספרי של הקבוע α.

ג. מצאו ביטוי עבור הכוח המפעיל את המנוע.

ד. חשבו את $\Psi(x,t = 0.1\ sec)$ ושרטטו את הפונקציה.

5) תרגיל - עוד מנוע

מיתר חצי אינסופי בעל צפיפות מסה $\rho = 0.3\frac{\text{kg}}{m}$ מוחזק במתיחות של $270N$. קצה המיתר נמצא ב x=0, בו יש מנוע המפעיל את הכוח הבא:

$$F_D(t) = \begin{cases} 0 & t \le 0 \\ 2t^2(t-1)(t-4) & 0 \le t \le 4s \\ 0 & t \ge 4s \end{cases}$$

א. רשמו ביטוי עבור פונקציית הגל בכל מקום ובכל רגע. הניחו שהמיתר נמצא במנוחה ובשיווי משקל ב $t = 0$

ב. שרטטו את פונקציית הגל ברגעים $t = 6,3\ sec$.

תשובות סופיות

1) א. $\psi(x,t)=0.4\sin\left(20(x-2t)\right)$

ב. $A=0.4m,\ \ \lambda=\frac{\pi}{10}m,\ \ K=20\frac{1}{m},\ \ f=\frac{20}{\pi}\text{Hz},\ \ T=\frac{\pi}{20}\sec$

ג. $\psi=(x,t)=0.4\sin(20x)\cos(40t)$; אין שינוי בפרמטרים של סעיף ב.

2) $$\psi(x,t)=\frac{1}{2}\left[|x-15t|e^{-\frac{|x-15t|}{b}}+|x+15t|e^{-\frac{|x+15t|}{b}}\right]-\frac{ab}{60}\left[e^{-\left(\frac{x+15t}{b}\right)^2}-e^{-\left(\frac{x-15t}{b}\right)^2}\right]$$

3) א. $$\psi(x,t)=0.001\sin\left(5(x-120t)\right)+0.001(x-120t)+$$ $$+0.001\sin\left(5(x-120t)\right)+0.002(x-120t)$$

ב. $0.642\frac{\text{m}}{\text{s}}$

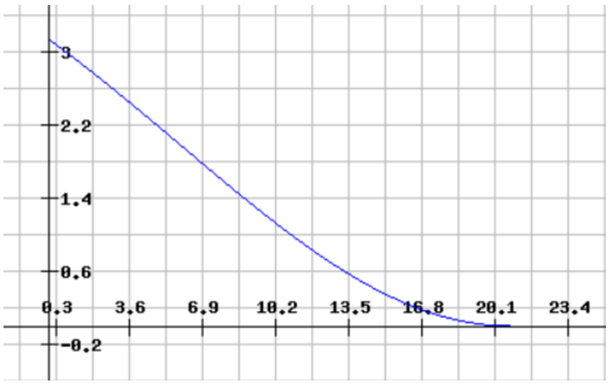
4) א. $$\psi(x,t)=\begin{cases}0 & t<\frac{x}{v}\\ b\left(1-e^{-\alpha\left(t-\frac{x}{v}\right)^2}\right) & t\geq\frac{x}{v}\end{cases}$$

ב. $98.4\frac{1}{\sec^2}$

ג. $F(t)=\frac{2\alpha Tb}{v}te^{-\alpha t^2}$

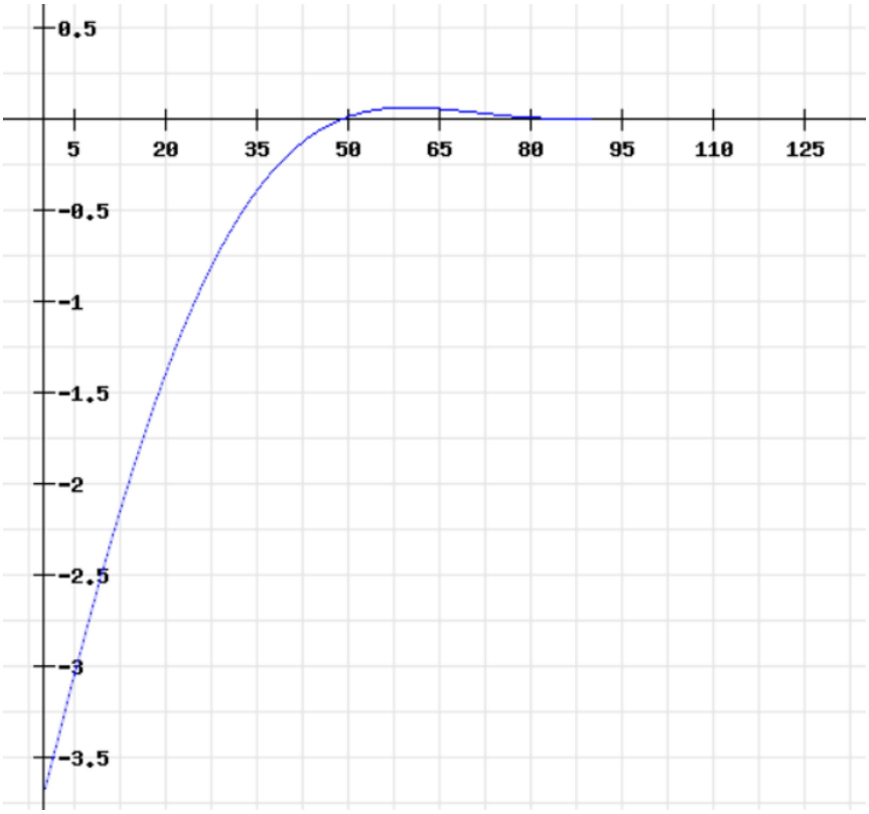
ד. $\psi(x,0.1)=5\text{cm}\left(1-e^{-98.4\left(0.1-\frac{x}{208}\right)^2}\right)$

שרטוט:



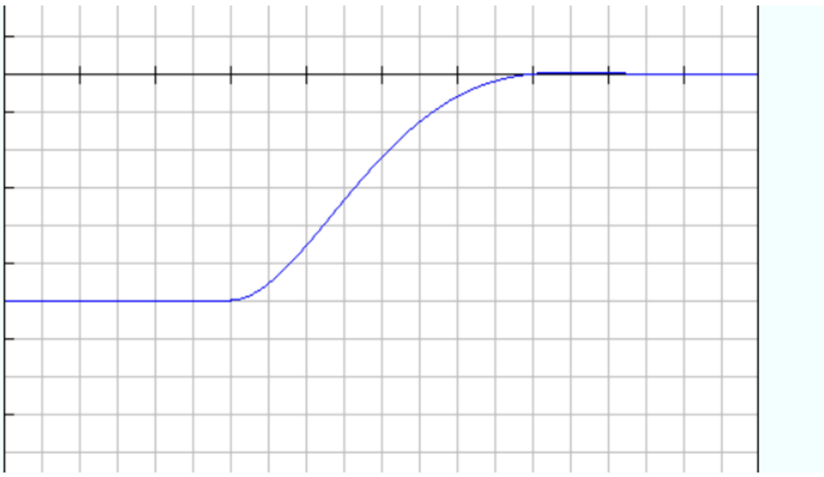
5) א. $$\psi(x,t)=\frac{1}{9}\begin{cases}0 & t-\frac{x}{30}\leq 0\\ \frac{2}{5}\left(t-\frac{x}{30}\right)^5-\frac{5}{2}\left(t-\frac{x}{30}\right)^4+\frac{8}{3}\left(t-\frac{x}{30}\right)^3 & 0\leq t-\frac{x}{30}<4\\ 1220 & t-\frac{x}{30}\geq 4\end{cases}$$

ב. $$\psi(x,3)=\frac{1}{9}\begin{cases}0 & 90\leq x\\ \frac{2}{5}\left(3-\frac{x}{30}\right)^5-\frac{5}{2}\left(3-\frac{x}{30}\right)^4+\frac{8}{3}\left(3-\frac{x}{30}\right)^3 & 0\leq x\leq 90\end{cases}$$



שרטוט :

$$\psi(x,6)=\frac{1}{9}\begin{cases}0 & 180\le x\\ \frac{2}{5}\left(6-\frac{x}{30}\right)^5-\frac{5}{2}\left(6-\frac{x}{30}\right)^4+\frac{8}{3}\left(6-\frac{x}{30}\right)^3 & 60\le x\le 180\end{cases}$$



שרטוט :

החזרה והעברה

רקע

תנאי שפה לנקודת אי-רציפות במיתר ב- $x=0$.

רציפות הפונקציה $1.\ \psi_L(0,t)=\psi_R(0,t)$

רציפות הכוח $2.\ F_L=F_R$

אם המתיחות אחידה, אז תנאי 2 הופך לרציפות הנגזרת

$$\left.\frac{\partial\psi_L}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial\psi_R}{\partial x}\right|_{x=0}$$

$$\psi_r(x,t)=r\psi:(-x,t)$$
$$\psi_t(x,t)=t\psi:\left(\frac{v_1}{v_2}x,t\right)$$
$$v_1=\sqrt{\frac{T}{\rho_1}}v_2=\sqrt{\frac{T}{\rho_2}}$$

מקדם החזרה

$$r=\frac{v_2-v_1}{v_2+v_1}=\frac{\sqrt{\rho_1}-\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_2}-\sqrt{\rho_1}}$$

מקדם העברה

$$t=\frac{2v_2}{v_2+v_1}=\frac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1}-\sqrt{\rho_2}}$$

הערה : את הנוסחאות של מקדם ההעברה וההחזרה נרשום בנושא הבא בצורה יותר כללית עם שימוש בעכבות.

שאלות

1) תרגיל – ביטול של הגל העובר או החוזר

מיתר מורכב משני חלקים בעלי צפיפויות שונות ρ_1 ו-ρ_2 ומתיחות אחידה T .
גל מהצורה $\Psi_A(x,t) = |A|\cos(k_1x - \omega t)$ מתקדם בכיוון החיובי ממיתר 1 לכיוון מיתר 2. נתונים : $\rho_2, \rho_1, k_1, T, A, \omega$

א. מצאו את הביטוי עבור הגל המועבר והגל המוחזר באמצעות נתוני השאלה.

ב. נניח עתה, כי בנוסף ל-Ψ_A שולחים גל נוסף ממיתר 2 לכיוון מיתר 1 : $\Psi_D(x,t) = |D|\cos(-k_2'x - \omega' t + \varphi)$. נתון כי $\rho_2 < \rho_1$.
מצאו את $\varphi, \omega', k_2', D,$ כך שלאחר המעבר של הגלים בין המיתרים, במיתר 2 יהיה רק גל הנוסע שמאלה. מהם התנאים לכך שבמיתר 1 יהיה רק גל הנוסע ימינה?

ג. האם ניתן למצוא תנאי, עבורו בו-זמנית במיתר 1 יהיה רק גל הנוסע ימינה ובמיתר 2 רק גל הנוסע שמאלה? נמקו.

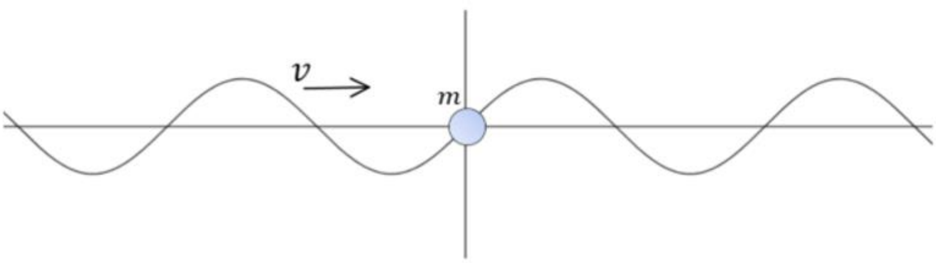
2) תרגיל - החזרה והעברה ממסה על מיתר

חרוז קטן בעל מסה m נמצא על מיתר מתוח בעל מתיחות אחידה.
גל המתקדם משמאל במיתר מזיז את החרוז בתנועה אנכית בלבד.
צפיפות המסה ליחידת אורך של המיתר היא ρ ומהירות הגלים במיתר היא v.

א. הגדירו את ראשית הצירים במיקום החרוז ורשמו פונקציית גל כללית עבור המיתר משמאל ומימין לחרוז. השתמשו במספרים מורכבים.
מהם תנאי השפה של פונקציית הגל בנקודה בה נמצא החרוז?

נסמן ב-A את אמפליטודת הגל הפוגע, ב-B את אמפליטודת הגל המוחזר וב-C את אמפליטודת הגל העובר.

ב. הראו כי: $\frac{B}{A} = \frac{iQ}{1-iQ}$ ו- $\frac{C}{A} = \frac{1}{1-iQ}$,
כאשר: $Q = \frac{m\omega}{2\rho v}$.



תשובות סופיות

1) א.

$$\psi_r\left(x,t\right)=\frac{\sqrt{\rho_1}-\sqrt{\rho_2}}{\sqrt{\rho_1}+\sqrt{\rho_2}}\left|A\right|\cos\left(k_1x+\omega t\right)$$

$$\psi_t\left(x,t\right)=\frac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1}+\sqrt{\rho_2}}\left|A\right|\cos\left(k_2x+\omega t\right),\qquad k_2=k_1\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}$$

ב. שמאלה:

$$k_2=k_1^{'},\ \ w=w',\ \ \phi=0$$

$$\left|D\right|=\frac{2\sqrt{\rho_1}}{\sqrt{\rho_1}+\sqrt{\rho_2}}\left|A\right|$$

ימינה:

$$k_2=k_1^{'},\ \ w=w',\ \ \phi=\pi$$

$$\left|D\right|=\frac{\sqrt{\rho_1}-\sqrt{\rho_2}}{2\sqrt{\rho_2}}\left|A\right|$$

ג. לא, כי הפאזה בכל אחד צריכה להיות שונה.

2) א. $\psi_L\left(x=0,t\right)=\psi_R\left(x=0,t\right)$, $T\left(\left.\frac{\partial\psi_R}{\partial x}\right|_{x=0}-\left.\frac{\partial\psi_L}{\partial x}\right|_{x=0}\right)=m\ddot{\psi}_L\left(x=0,t\right)$

ב. הוכחה בסרטון.

עכבה

רקע

העכבה, נקראת גם אימפדנס (impedance), מסומנת באות Z, ונוסחתה

$$Z = \sqrt{\rho T} = \frac{T}{V}$$

T – מתיחות

V – מהירות הגל

$$|Z| = \frac{|F_y|}{|V_y(t)|}$$

F_y – הכוח על אלמנט מסה

$V_y(t)$ – מהירות אלמנט מסה (מהירות החומר)

מקדמי העברה והחזרה בפגיעה של גל מתווך 1 ל-2 :

$r = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}$ מקדם החזרה

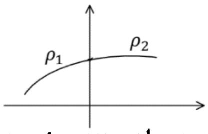
$t = \frac{2z_1}{z_1 + z_2}$ מקדם העברה

תאום עכבות : $z_1 = z_2 \Leftarrow t = 1$ ו- $r = 0$

שאלות

1) תרגיל – מיתר עם שתי צפיפויות ושני גלים

שני מיתרים מאוד ארוכים בעלי צפיפויות מסה שונות ρ_1 ו- ρ_2 מחוברים בנקודה x=0 ויוצרים מיתר אחד ארוך.



המתיחות במיתר היא אחידה (כלומר לשני החלקים אותה מתיחות T)

שני גלים מגיעים לעבר נקודת האי רציפות : גל עם אמפליטודה A מגיע מצד ימין וגל עם אמפליטודה $3A$ מגיע מצד שמאל. שני הגלים בעלי אותה תדירות זוויתית ואין ביניהם הפרש פאזה קבוע.

א. רשמו ביטוי לפונקציית הגל בכל חלק של המיתר באמצעות מספרים מורכבים. הסבירו עבור כל איבר בפונקציה איזה גל הוא מתאר.

ב. רשמו את תנאי השפה שהפונקציות צריכות לקיים בנקודת אי הרציפות.

ג. השתמשו בתנאי השפה ובטאו את אמפליטודות כל הגלים במיתר, במונחים של האמפליטודה A ועכבות המיתר.

ד. חשבו שוב את האמפליטודות , הפעם באמצעות מקדמי העברה והחזרה.

תשובות סופיות

1) א.
$$\psi_1(x,t)=3Ae^{i(k_1x-\omega t)}+Be^{-i(k_1x-\omega t)}$$
$$\psi_2(x,t)=Ce^{i(k_2x-\omega t)}+Ae^{-i(k_2x-\omega t)}$$
3A – ימינה ; B – שמאלה ; C – ימינה ; A – שמאלה.

ב. $\left.\frac{\partial\psi_2}{2x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial\psi_1}{2x}\right|_{x=0}$ $\qquad \psi_1(0,t)=\psi_2(0,t)$

ג. $C=\frac{5z_1+z_2}{z_1+z_2}A$ $\qquad B=\frac{3z_1-z_2}{z_1+z_2}A$

ד. הוכחה בסרטון.

אנרגיה הספק ותנע

רקע

אנרגיה ליחידת אורך של גל נע במיתר

$$\varepsilon(x,t)=\rho\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)^2=\rho v^2\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2$$

אנרגיה ממוצעת בזמן

$$\bar{\varepsilon}=\frac{1}{2}\rho\omega^2|A|^2$$

הספק רגעי בנקודה - כמה עבודה עושה החלק השמאלי על החלק הימני כל יחידת זמן

$$P^{\pm}=\pm Z\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)^2=\pm v\varepsilon(x,t)$$

$P^{\pm}$ הוא הספק רגעי של גל הנע בכיוון החיובי/שלילי

ההספק הממוצע בזמן

$$\bar{P}^{\pm}=\pm\frac{1}{2}z\omega^2|A|^2$$

מקדם ההחזרה של האנרגיה

$$R=\frac{P_1^-}{P_1^+}=r^2=\left(\frac{z_1-z_2}{z_1+z_2}\right)^2$$

מקדם ההעברה של האנרגיה

$$\mathrm{T}=\frac{\mathrm{P}_2^+}{\mathrm{P}_1^+}=\frac{\mathrm{z}_2}{\mathrm{z}_1}\mathrm{t}^2=\frac{4\mathrm{z}_1\mathrm{z}_2}{(\mathrm{z}_1+\mathrm{z}_2)^2}$$

$$\mathrm{R}+\mathrm{T}=1$$

התנע הוא אפס

שאלות

1) תרגיל - חישובים בפגיעה בתווך

גל סינוס נע ימינה במיתר מסוים בו מהירות הגל היא v_1.
צורת הגל היא $\Psi_i(x,t) = 1.4mm \cdot sin(kx - 200t)$.
הגל מגיע לצומת בו צפיפות המיתר משתנה (המתיחות נשארת קבועה), כך שבחלק הימני מהירות הגל היא $v_2 = 5v_1$.
בהינתן שההספק הממוצע של הגל הפוגע הוא 60 W,

א. מהם האימפדנסים של שני חלקי המיתר?
ב. מהו ההספק הממוצע של הגל העובר והגל החוזר?
ג. מהי האמפליטודה של הגל העובר ושל הגל החוזר?

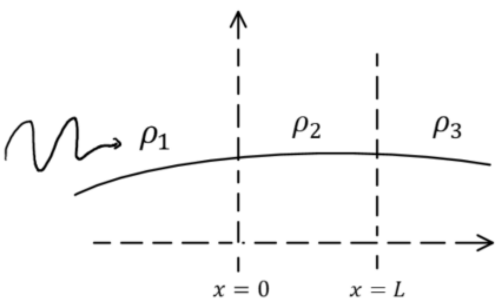
2) שינוי בהספק כתוצאה משינוי פרמטרים

נתון מיתר מתוח בעל צפיפות מסה $\rho = 2 \cdot 10^{-2}\frac{\text{kg}}{m}$ ומתיחות $T = 50N$.

א. מהו ההספק הממוצע שצריך לספק למיתר, על מנת לייצר גל סינוס בעל תדירות $f = 40\text{Hz}$ ואמפליטודה של $A = 4\text{mm}$?
ב. פי כמה ישתנה ההספק של הגל אם:
1. נכפיל את אורך החבל?
2. נכפיל את האמפליטודה ונקטין את התדירות פי 2?
3. נקפל את החבל לשניים ונשתמש בחבל הכפול כחבל החדש?

3) מיתר עם 3 חלקים

מיתר מורכב משלושה חלקים בעלי צפיפות מסה שונה, כפי שמופיע באיור להלן. גל מגיע מכיוון שמאל T (המתיחות של המיתר) זהה בשלושת החלקים.



א. רשמו ביטוי עבור חמשת הגלים הרלוונטיים בשאלה. עבדו בצורה מורכבת.
ב. מהם תנאי השפה בבעיה?
ג. רשמו את היחס בין אמפליטודת הגל העובר לאמפליטודת הגל הפוגע.
ד. רשמו ביטוי ליחס בין ההספק של הגל העובר להספק של הגל הפוגע.
ה. מה משמעות הדרישה $\frac{P_3}{P_1}$=1- ? הראו שעל מנת לקיים דרישה זו צריך להתקיים $z_2 = \sqrt{z_1 z_3}$ ו- $L = \frac{\lambda}{4}$, כאשר λ הוא אורך הגל באזור האמצעי.

4) תרגיל - חישוב אמפליטודה בתיאום עכבות

מיתר בעל צפיפות מסה ρ_1 מחובר למיתר בעל צפיפות מסה ρ_2 באמצעות מיתר נוסף שצפיפות המסה שלו משתנה באופן רציף מ- ρ_1 ל- ρ_2 . במקרה כזה לא תתקיים החזרה אם אורך הגל קטן ביחס לקצב השינוי בצפיפות המסה.
חשבו תחת הנחה זו מה היחס בין האמפליטודה של הגל העובר לגל הפוגע?
הניחו מתיחות אחידה.

תשובות סופיות

1) א. $z_1 = 1531\frac{\mathrm{N\cdot s}}{\mathrm{m}},\ z_2 = 506\frac{\mathrm{N\cdot s}}{\mathrm{m}}$ ב. $\overline{P}_R = 15.6\mathrm{W},\ \overline{P}_T = 44.4\mathrm{W}$

ג. $B = 0.71\mathrm{mm} \quad C = 2.1\mathrm{mm}$

2) א. $0.5\mathrm{W}$ ב.1. לא ישתנה. 2. לא ישתנה. 3. יגדל פי $\sqrt{2}$.

3) א. $\psi_2(x,t) = Ce^{i(k_2x-\omega t)} + De^{-i(k_2x+\omega t)}$ $\psi_1(x,t) = Ae^{i(k_1x-\omega t)} + Be^{-i(k_1x+\omega t)}$

$\psi_3(x,t) = Ee^{i(k_3x-\omega t)}$

ב.
$$\psi_1(0,t) = \psi_2(0,t) \quad T_1\left.\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right|_{x=0} = T_2\left.\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right|_{x=0}$$
$$\psi_2(2,t) = \psi_3(2,t) \quad T_2\left.\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right|_{x=L} = T_3\left.\frac{\partial\psi_3}{\partial x}\right|_{x=L}$$

ג.
$$\frac{4z_2z_1e^{i(k_2-k_3)L}}{\left[(z_1+z_2)(z_2+z_3)-(z_2-z_1)(z_2-z_3)e^{i2k_2L}\right]}$$

ד.
$$\frac{16z_2^2z_1z_3}{\left|(z_1+z_2)(z_2+z_3)-(z_2-z_1)(z_2-z_3)e^{2ik_2L}\right|^2}$$

ה. שכל האנרגיה של הגל הפוגע עוברת לגל העובר.

4) $\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{\frac{1}{4}}$

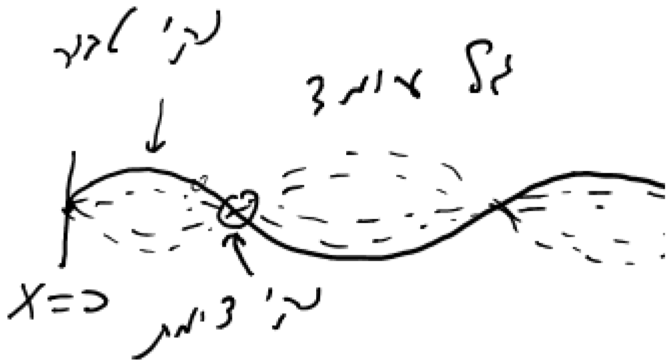
גלים עומדים

רקע

<u>מיתר חצי אינסופי</u>

<u>קצה קשור</u>

$$\Psi(x=0,t)=0 \quad => $$
$$\Psi(x,t)=C\sin(kx)\sin(\omega t+\varphi)$$



<u>קצה חופשי</u>

$$\left.\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right|_{x=0}=0 \quad => \quad \Psi(x,t)=C\cos(kx)\cos(\omega t+\varphi)$$

<u>מיתר סופי</u>

<u>מיתר סופי עם 2 קצוות קשורים</u>

$$\Psi(x=0,t)=\Psi(x=\mathrm{L},t)=0$$

$$k_n=\frac{\pi n}{L} \qquad n=0,1,2,3\ldots \quad f_n=\frac{vn}{2L}$$

$$\lambda_n=\frac{2L}{n}$$

$$\Psi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin(\mathrm{k}_n x)\sin(\omega_n t+\varphi_n)$$

<u>מיתר סופי עם קצה קשור וקצה חופשי</u>

$$\Psi(x=0,t)=0\,,\left.\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right|_{x=\mathrm{L}}=0$$

$$k_n=\frac{\pi}{L}(\mathrm{n}+\frac{1}{2})\qquad n=0,1,2,3\ldots$$

$$\lambda_n=\frac{2L}{(\mathrm{n}+\frac{1}{2})}$$

$$f_n=\frac{v}{2L}(\mathrm{n}+\frac{1}{2})$$

$$\Psi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin(\mathrm{k}_n x)\sin(\omega_n t+\varphi_n)$$

<u>מיתר סופי עם 2 קצוות חופשיים</u>

$$\left.\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right|_{x=0}=0\ ,\qquad \left.\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right|_{x=\mathrm{L}}=0$$

$$k_n=\frac{\pi n}{L}\qquad n=0,1,2,3\ldots$$

$$\lambda_n=\frac{2L}{n}$$

$$f_n=\frac{vn}{2L}$$

$$\Psi(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(\mathrm{k}_n x)\sin(\omega_n t+\varphi_n)$$

פתרון באמצעות טור פוריה :

$$\Psi(x,t)=\frac{B_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}[A_n\sin(k_n x)+B_n\cos(k_n x)][C_n\sin(\omega_n t)+D_n\cos(\omega_n t)]$$

שאלות

1) תרגיל – גל פוגע וגל חוזר כביטוי של שני גלים עומדים

הראו כי הגל $\Psi(x,t) = A\cos(\omega t - kx) + rA\cos(\omega t + kx)$, כאשר r קבוע כלשהו, ניתן לביטוי כסופרפוזיציה של שני גלים עומדים: $\Psi(x,t) =$
$A(1+r)\cos(\omega t)\cos(kx) + A(1-r)\sin(\omega t)\sin(kx)$

2) תרגיל - מיתר פלדה בפסנתר

מיתר פסנתר מיוצר מפלדה בעלת צפיפות מסה **ליחידת נפח** $\rho = 4800\frac{\text{kg}}{m^3}$
רדיוס המיתר הוא r, היצרן ממליץ להפעיל את המיתר תחת לחץ (כוח ליחידת ששטח חתך) של $1.3 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2}$.

א. הראו שמהירות הגלים במיתר אינה תלויה ברדיוס שלו, וחשבו אותה.

ב. מה צריך להיות אורך המיתר כדי שישמיע את הצליל 'לה', שתדירותו 440Hz ? כמנגנים במיתר בד"כ שומעים את התדירות הבסיסית.

ג. מגדילים את המתיחות פי α ללא שינוי באורך המיתר, מה צריכה להיות α כדי להעלות את תדירות המיתר פי 1.2?

3) תרגיל – קירות בחצי ומינוס חצי L

מיתר באורך L קשור בשני צדדיו לקיר כאשר קצוות המיתר הקשורים לקיר נמצאים ב x=L/2 וב- x=-L/2. נתון כי בזמן $t = 0$ המיתר כולו בשיווי משקל.

א. הציבו את תנאי השפה בפתרון של משוואת הגלים ומצאו את הקבועים המתאימים.
שימו לב כי אתם אמורים לקבל פתרון שונה ל n זוגי ול n אי-זוגי .

ב. שרטטו את ארבעת הפתרונות הראשונים, והשוו את התוצאה למה שמתקבל כאשר פותרים את הבעיה עבור קיר שמאלי ב- $x = 0$ וקיר ימני ב- $x = L$.

ג. רשמו פתרון כללי לבעיה על ידי שימוש בעקרון הסופרפוזיציה.

4) תרגיל - מודל של פסנתר

הצליל בפסנתר נוצר על ידי מכה של פטיש במיתר הקשור בשתי קצותיו. ברגע ההקשה $(t = 0)$ המיתר אופקי ומהירותו במיקום הפגיעה היא v_0. אורך המיתר הוא L. מרכז הפגיעה של הפטיש היא בנקודה $x = \frac{L}{2}$ כאשר אורך המגע של הפטיש עם המיתר הוא a.

א. מהם תנאי השפה בבעיה? הגדירו את ראשית הצירים בקצה אחד של המיתר.

ב. מהי צורת המיתר ברגע הפגיעה ($\Psi(x, 0)$) ?

ג. רשמו את מהירות כל אלמנט של המיתר ברגע פגיעה.

ד. מצאו את $\Psi(x, t)$. ניתן להניח כי המתיחות וצפיפות המסה במיתר נתונות.

5) תרגיל - מיתר מכופף לפרבולה ומשוחרר ממנוחה

מיתר בעל אורך l קשור בשני קצותיו . ברגע $t = 0$ המיתר נמצא במנוחה, ומכופף כך שצורתו היא $\Psi(x, 0) = x(l - x)$. $x = 0$ הוא הקצה השמאלי של המיתר. מצאו את פונקציית הגל של המיתר כתלות בזמן. הניחו שהמתיחות והצפיפות ידועים.

6) תרגיל - חישוב אנרגיה של מיתר

נתון מיתר באורך $l = 2\,m$, שהעכבה שלו היא $30\,\frac{\text{kg}}{\text{sec}}$, והמתיחות שלו היא $2000\,N$. ישנו גל הכלוא במיתר זה, אשר צורתו נתונה על ידי $\Psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-3}\,\frac{2^{-n}}{n}\,sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) cos(\omega_n t)$.

א. האם המיתר מקובע בשני קצותיו, פתוח בשני קצותיו או פתוח בקצה אחד ומקובע בקצה השני? נמקו. הניחו כי הקצה של המיתר ב $x = 0$

ב. האם מהנתון ניתן לדעת, בלי לחשב, את המהירות החומרית ברגע $t = 0$?

ג. חשבו את האנרגיה הכוללת של המיתר.

7) תרגיל – מושכים מרכז של מיתר ומשחררים

נתון מיתר באורך l ובמתיחות T, ששני קצותיו קשורים. מזיזים את אמצע המיתר מרחק a משיווי המשקל ומשוחררים ממנוחה.

א. הראו כי בזמן $t = 0$ למיתר אנרגיה $\frac{2Ta^2}{l}$ בהנחה שהמתיחות לא משתנה.

ב. מצאו את פונקציית הגל של המיתר כתלות במיקום ובזמן.

ג. הראו ששלושת ההרמוניות בעלות התדירות הנמוכה ביותר מכילות 93.3% מהאנרגיה כשהמיתר משוחרר.

ד. מהי האנרגיה של המיתר ב $t = 3\,sec$?

8) תרגיל - מיתר מחובר בקצה לקפיץ

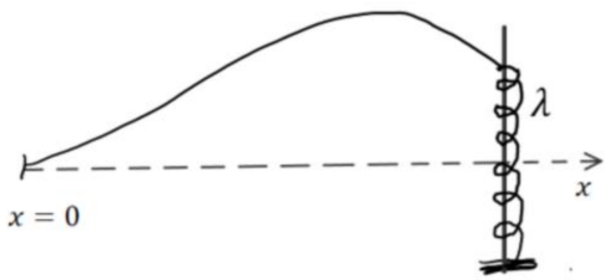
מיתר באורך L קשור בנקודה $x = 0$ ובקצה $x = L$ מחובר לקפיץ אנכי בעל קבוע קפיץ λ . הקפיץ יכול לנוע בכיוון אנכי בלבד והוא רפוי כאשר המיתר אופקי . מתיחות המיתר היא T.

א. רשמו תנאי שפה למיתר והראו כי המשוואה ממנה ניתן למצא את המודים העצמיים היא $\tan(x) = -\alpha x$ כאשר $\alpha = \frac{T}{\lambda L}$, $x=kL$,

ב. מה התוצאה במקרה $1 \gg \alpha$ ובמקרה $1 \ll \alpha$? מה המשמעות הפיזיקאלית של כל מקרה?

ג. שרטטו פתרון גרפי עבור $\alpha = 1$ וסמנו את שלושת נקודות הפתרון הראשונות מהן מקבלים את שלושת אופני התנודה הראשונים.

ד. שרטטו את שני אופני התנודה הראשונים שקיבלתם בסעיף ג.



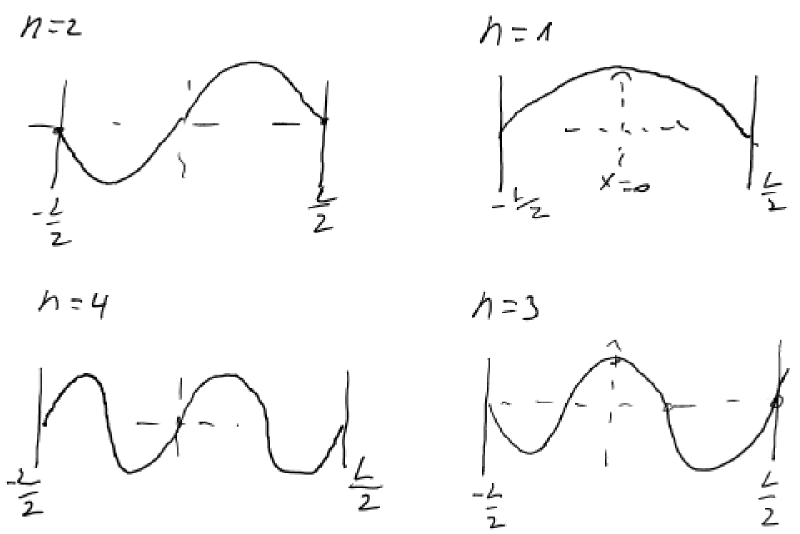
תשובות סופיות

1) הוכחה בסרטון.

2) א. $520\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ב. $59\mathrm{cm}$ ג. 1.44

3) א. $\omega_n = v\cdot k_n$, $k_n = \frac{\pi n}{L}$, $\psi(x,t) = \begin{cases} A_n \sin k_n x \sin\omega_n t & n=\text{even} \\ B_n \cos k_n x \sin\omega_n t & n=\text{odd} \end{cases}$

ב.



ג. $\psi(x,t) = \sum_{n=2,even}^{\infty} A_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t) + \sum_{n=1,odd}^{\infty} B_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t)$

כאשר $k_n = \frac{\pi n}{L}, \omega_n = v k_n$

4) א. $\psi(0,t) = \psi(L,t) = 0$ ב. $\psi(x,0) = 0$

ג. $\dot{\psi}(x,0) = \begin{cases} v_0 & \frac{L-a}{2} LxL \frac{L+a}{2} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

ד. $\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4v_0 L}{\pi^2 n^2}\sqrt{\frac{e}{T}} \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi n a}{2L}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)\sin\left(\sqrt{\frac{T}{\rho}}\frac{\pi n}{L}t\right)$

5) $\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t)$, כאשר $\omega_n = v k_n$, $k_n = \frac{\pi n}{\ell}$,

וכן $D_n = \begin{cases} \frac{8\ell^2}{(\pi n)^3} & n \text{ odd} \\ 0 & n \text{ even} \end{cases}$.

6) א. הקצוות קשורים.   ב. כן.   ג. $8.25\cdot 10^{-4}\mathrm{J}$

7) א. הוכחה בסרטון.   ג. הוכחה בסרטון.   ד. $\frac{2Ta^2}{l}$

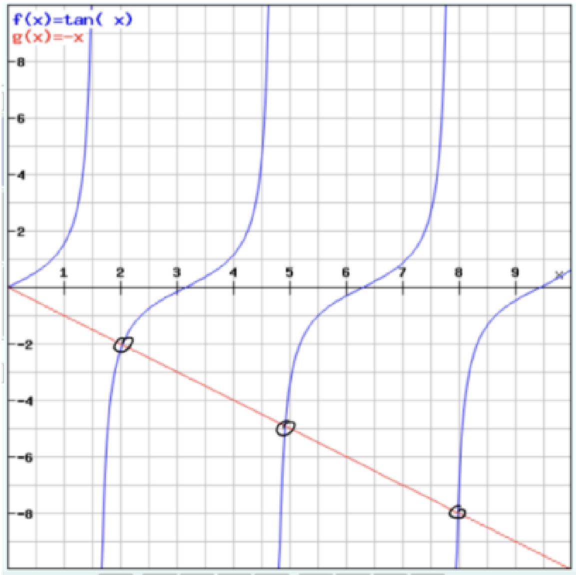
ב. $\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x)\cos(\omega_n t),\ \omega_n = \sqrt{\frac{T}{\rho}}k_n,\ A_n = \frac{8a}{\pi^2 n^2}\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right),\ k_2 = \frac{\pi n}{\ell}$

8) א. הוכחה בסרטון.

ב. במקרה $\alpha \gg 1$, $K_n = \frac{\pi}{L}\left(n+\frac{1}{2}\right)$, קיבלנו K_n של קצה חופשי.

במקרה $\alpha \ll 1$, $K_n = \frac{\pi n}{L}$, קיבלנו K_n של קצה קשור.

ג.



ד.

תורת הגלים להנדסה רפואית

פרק 5 - קווי תמסורת

תוכן העניינים

קווי תמסורת ללא הפסדים

רקע

הקשרים בין המתח לזרם (בקו ללא הפסדים):

$$\frac{\partial I}{\partial x}=-C_0\frac{\partial V}{\partial t} \qquad \frac{\partial V}{\partial x}=-L_0\frac{\partial I}{\partial t}$$

משוואות הגלים:

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2}=L_0C_0\frac{\partial^2 I}{\partial t^2} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=L_0C_0\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

כאשר C_0 ו- L_0 הם הקיבול וההשראות ליחידת אורך.

עכבה

עכבה כללית מוגדרת לפי: $Z=\frac{V}{I}$ והיא יכולה להיות תלויה במיקום

עכבה אופיינית:

$$\frac{V^+(x,t)}{I^+(x,t)}=-\frac{V^-(x,t)}{I^-(x,t)}=Z_0=\sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$$

לא תלויה במיקום (בדר"כ כשנתונה העכבה הכוונה לעכבה אופיינית).

החזרה והעברה

$$I^-(x_0,\mathrm{t})=rI^+(x_0,\mathrm{t}) \qquad V^-(x_0,\mathrm{t})=-rV^+(x_0,\mathrm{t})$$

$$r=\frac{Z_0-Z_\mathrm{L}}{Z_L+Z_0}$$

$$I_\mathrm{L}^+(x_0,\mathrm{t})=tI^+(x_0,\mathrm{t}) \qquad V_\mathrm{L}^+(x_0,\mathrm{t})=tV^+(x_0,\mathrm{t})$$

$$t=\frac{2Z_0}{Z_L+Z_0}$$

הערה: הנוסחאות הן בהנחה שאין גל חוזר בעומס.

כאשר יש קצר בקצה בקו, $Z_L=0$, מקבלים גל עומד.

שאלות

1) עכבת כניסה

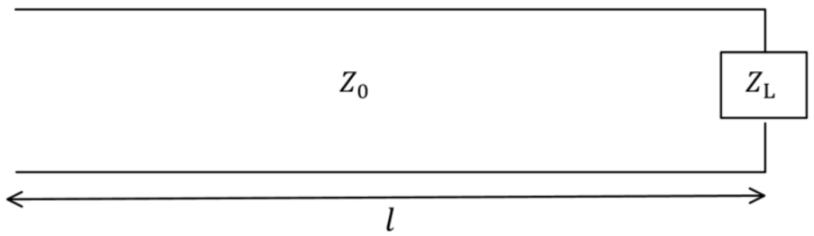
קו תמסורת באורך l ועכבה אופיינית Z_0 מחובר בקצה לעומס בעל עכבה אופיינית Z_L. הניחו כי אין גל חוזר בעומס וכי אמפליטודת הגל המתקדם בכיוון החיובי ידועה.

א. רשמו את פונקציות המתח והזרם של הגל הפוגע והגל החוזר אם ראשית הצירים נמצאת בנקודת החיבור עם העומס.

ב. חזרו על סעיף א אם הראשית בתחילת הקו.

ג. חשבו עבור סעיפים א' ו- ב' את העכבה בתחילת הקו, עכבה זו נקראת עכבת הכניסה Z_{in}.

ד. חשבו עבור סעיף ב את העכבה בדיוק באמצע הקו.



2) גל בכבל קואקסיאלי פוגע בצומת

נתון קו תמסורת חשמלי המורכב מכבל קואקסיאלי ארוך מאוד שבו צומת כך שהעכבות האופייניות משני צידי הצומת הן Z_1 ו- Z_2.

לצומת מגיע גל הרמוני. נתונים האמפליטודה, התדירות ואורך הגל של גל הזרם המגיע לצומת: $\omega,\ \lambda_1 I_0^+$.

על סמך הנתונים הנ"ל:

א. האם ניתן לחשב את אמפליטודת גל הזרם העובר והחוזר?

ב. האם ניתן לחשב את אמפליטודות של שלושת גלי המתח?

ג. האם ניתן לחשב את אורך הגל של הגל החוזר ואת אורך הגל של הגל העובר?

ד. האם ניתן לחשב את ההספק של כל אחד מהגלים?

3) קו תמסורת פתוח עם תנאי התחלה

נתון קו תמסורת בעל השראות ליחידת אורך של: $0.03n\,H/m$
וקיבוליות ליחידת אורך של: $4\,\mu F/m$. אורך הקו הוא: $l = 400m$
והוא פתוח משני קצוותיו.
ברגע: $t = 0$ המתח בקו מתאפס והזרם הוא:

$$I(x) = \begin{cases} I_0 \dfrac{x}{l} & , \ 0 \le x \le l/2 \\ 0 & , \ l/2 \le x \le l \end{cases}$$

כאשר: $I_0 = 20A$.

א. מהי מהירות הגלים בקו? האם הקו נמצא בריק?
ב. בקירוב של שתי הרמוניות ראשונות, חשבו את הזרם ב- $t = 3\mu s$ כתלות ב- x.
ג. מהו המתח באותו זמן בקצוות ובמרכז הקו?

4) קו תמסורת אינסופי עם תנאי התחלה

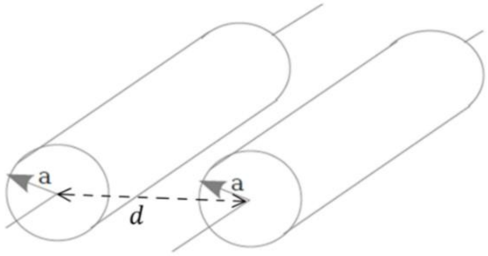
קו תמסורת עשוי מכבל קואקסיאלי אינסופי בעל עכבה אופיינית של 25Ω וקיבול ליחידת אורך של: $C_0 = 0.2\,nF/m$.

א. חשבו את מהירות הגלים והקבוע הדיאלקטרי היחסי ε_r.
ניתן להניח: $\mu_r = 1$.
ב. נתון כי: $V(x, t=0) = \frac{aV_0 x}{x^2 + a^2}$ וכי: $I(x, t=0) = 0$
כאשר: V_0 , a נתונים.
חשבו את גלי המתח והזרם כתלות במיקום ובזמן.
ג. מהי האנרגיה הכוללת החולפת ב- $x = 50m$ מ- $t = 0$ ועד $t = 1ms$.
מספיק לרשום את האינטגרל אין צורך לפתור אותו.

5) חישוב השראות וקיבול בכבלים מקבילים

נתון קוו תמסורת העשוי משני כבלים ארוכים מאוד בעלי רדיוס a ומרחק d בין מרכזיהם. הניחו ש- $d >> a$ וכי התפלגות המטען על הכבלים היא אחידה ביחס לסיבוב הכבל.

א. מהו הקיבול ליחידת אורך של הכבלים?
ב. מהי ההשראות ליחידת אורך של הכבלים?



6) חישוב השראות וקיבול בכבל קואקסיאלי

כבל קואקסיאלי ארוך מאוד עשוי ממעטפת גלילית ברדיוס a ומעטפת חיצונית ברדיוס b וריק בינהם.

א. מהו הקיבול ליחידת אורך של הכבל?

ב. מהי ההשראות ליחידת אורך של הכבל?

ג. מהי מהירות הגלים בכבל?

תשובות סופיות

1) א. $V^+(x)=V_0^+e^{ikx}$, $V^-(x)=-rV_0^+e^{-ikx}$, $I^+(x)=\frac{V_0^+}{Z_0}e^{ikx}$, $I^-(x)=r\frac{V_0^+}{Z_0}e^{-ikx}$

ב. $V^+(x)=V_0^+e^{ikx}$, $V^-(x)=-rV_0^+e^{2ikl}e^{-ikx}$, $I^+(x)=\frac{V_0^+}{Z}e^{ikx}$, $I^-(x)=r\frac{V_0^+}{Z_0}e^{2ikl}e^{-ikx}$

ג. בשני המקרים: $Z_{in}=Z_0\frac{1-re^{2ikl}}{1+re^{2ikl}}$

ד. $Z_0\frac{1-re^{ikl}}{1+re^{ikl}}$

2) א. כן. ב. כן.

ג. אורך הגל החוזר זהה לאורך הגל הפוגע, אין מספיק נתונים לחשב את אורך הגל העובר.

ד. אין מספיק נתונים לחשב את אורך הגל העובר.

3) א. $9.13\cdot10^9\frac{m}{\sec}$ ב. $3.39_A\sin\left(\frac{\pi}{400}x\right)-2.91\sin\left(\frac{2\pi}{400}x\right)$

ג. $V(0,3\mu s)=-0.13V$, $V(l,3\mu s)=1.73V$, $V\left(\frac{l}{2},3\mu s\right)=0.798V$

4) א. $V=2\cdot10^8\frac{m}{\sec}$, $\varepsilon_r=2.25$

ב. $V(x,t)=\frac{1}{2}\left[\frac{aV_0(x-Vt)}{(x-Vt)^2+a^2}+\frac{aV_0(x+Vt)}{(x+Vt)^2+a^2}\right]$,

$$I(x,t)=\frac{aV_0}{2VL_0}\left[\frac{x-Vt}{(x-Vt)^2+a^2}-\frac{x+Vt}{(x+Vt)^2+a^2}\right]$$

ג. $\Delta E=\int_0^{0.001}V(50,t)I(50,t)\,dt$

5) א. $\frac{\pi\varepsilon_0}{\ln\left|\frac{d-a}{a}\right|}$ ב. $\frac{\mu_0}{\pi}\ln\left|\frac{d-a}{a}\right|$

6) א. $\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\frac{b}{a}}$ ב. $\frac{\mu_0}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$ ג. מהירות האור.

תורת הגלים להנדסה רפואית

פרק 6 - גלים אורכיים-גלי קול

תוכן העניינים

גלי קול בצינור

רקע

גל אורכי - תנועת המולקולות היא בכיוון ההתקדמות של הגל

$\psi\,(x,t)$ -פונקציית ההעתק של מולקולות הגז משיווי משקל. x מציין את מיקום המולוקולות בשיווי מישקל ולא את המיקום שלהן כתלות בזמן.

$\psi_p(x,t)$ -פונקציית הלחץ העודף access pressure

$\Delta\rho(x,t)$ -פונקציית השינוי בצפיפות

כאשר פונקציית ההעתק בנקודת צומת פונקציית הצפיפות/ לחץ בנקודת טבור ולהפך

הקשר בין פונקציית ההעתק לפונקציית הלחץ :

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{1}{\gamma P_0}\psi_p$$

P_0 - הלחץ בשיווי משקל

γ - קבוע הקשור לסוג הגז מתוך משוואת הגז בתהליך אדיאבטי

מקדם האלסטיות של הגז $B_a=\gamma P_0$

משוואת הגלים

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=\frac{\rho_0}{\gamma P_0}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

מהירות הגלים -מהירות הקול
(לפעמים גם כתובה באות c)

$$v = \sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$$

באוויר בתנאים סטנדרטיים :

$$v \approx 340\, {}^{m}/_{s}$$

אותה המשוואה מתקיימת גם עבור ψ_p ו- $\Delta\rho$

הקשר בין הצפיפות
לפונקציית ההעתק

$$\Delta\rho = -\rho_0 \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

<u>עכבה</u> של גל קול מישורי ליחידת שטח

$$\frac{Z}{A} = \rho_0 v$$

ρ_0 - צפיפות המסה בשיווי משקל

A - שטח החתך של הצינור

v - מהירות הקול בחומר

<u>אנרגיה הכוללת ליחידת אורך</u>

$$\varepsilon(x,t) = \frac{1}{2} A\rho_0 \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 + v^2 \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 \right] = A\rho_0 \left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2$$

השוויון האחרון נכון רק עבור גלים נעים

<u>אנרגיה ממוצעת בזמן</u>

$$\bar{U}_{\mathrm{dx}} = \bar{E}_{k_{\mathrm{dx}}} = \frac{1}{4} \rho_0 A \omega^2 \psi_{max}^2$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} \rho_0 A \omega^2 \psi_{max}^2$$

ψ_{max} - האמפליטודה של פונקציית ההעתק - קבוע

ω - התדירות הזוויתית

<u>הספק</u> של גל קול- כמה אנרגיה עוברת דרך שטח חתך ביחידת זמן

הספק של גל נע $P(x,\mathrm{t}) = \pm v\varepsilon(x,t)$

כאשר הפלוס/מינוס הם עבור גל שנע בכיוון החיובי/שלילי בהתאמה

(לא לבלבל עם P של לחץ)

<u>עוצמה של הגל</u> - ההספק ליחידת שטח

$$I(x,\mathrm{t}) = \frac{|P(x,t)|}{A} = v\rho_0\left(\frac{\partial\psi}{\partial \mathrm{t}}\right)^2$$

$$\bar{I} = \frac{1}{2}v\rho_0\omega^2\psi_{max}^2$$

מדידת עוצמה בסולם לוגריתמי

$$I_a = I_0 \cdot 10^a$$

a - היא העוצמה ב B (בל)

$$I_0 = 10^{-12}\frac{w}{m^2}$$

$1B = 10\,\mathrm{d}B$ ($\mathrm{d}B$ זה דציבל)

<u>עוצמה בגל כדורי</u>

$$I(r) = \frac{P}{4\pi r^2}$$

P – ההספק הכולל של הגל (אינו תלוי במרחק)

שאלות

1) שעון מעורר בחלל

אסטרונאוט הנמצא במעבורת חלל יצא מהמעברות לבצע תיקון חיצוני.
האסטרונאוט לקח איתו שעון מעורר וכיוון אותו לצלצל בשעה שבע בערב, כך שיספיק לחזור לארוחת הערב בתוך המעבורת. האסטרונאוט הניח את השעון לידו בזמן שהוא מבצע את התיקון.
האם האסטרונאוט ישמע את השעון מצלצל?
רמז: בחלל אין אוויר.

2) דוגמה - מצאו פונקציית גל מנתונים על צפיפות

גל קול הרמוני נע בכיוון החיובי. האמפליטודה של השינוי בצפיפות האוויר של הגל היא $A_{\Delta\rho} = 24 \cdot 10^{-3}\, {kg}/{m^3}$. התדירות של הגל היא $500Hz$.
נתון גם כי $\Delta\rho(0,0) = 0$, $\rho_0 = 1.2\, {kg}/{m^3}$ ו- $v = 340\, {m}/{s}$.
מצאו מהי ההסטה משיווי משקל של מולקולות האוויר הנמצאות ב-$x = 15cm$, בזמן $t = 0$.

3) תרגיל - כמה אנרגיה עברה בשעה

העוצמה של גל קול מישורי היא $I = 1.4\mu\, W/cm^2$.
חיישן בעל שטח חתך $A = 3.6cm^2$ קולט את הגל.
כמה אנרגיה קיבל החיישן כל שעה?

4) תרגיל - פי כמה גדלה העוצמה עבור שינוי של דציבל אחד

ראינו כי גידול של העוצמה ב-1B הוא גידול של פי 10 ביחידות של ${W}/{m^2}$.
חשבו פי כמה גדלה העוצמה ביחידות של ${W}/{m^2}$ עבור גידול של 1dB.

5) תרגיל - חישוב הפרעה בלחץ מעוצמה ממוצעת

נתון גל קול מישורי בתדירות $12kHz$. העוצמה הממוצעת בזמן של הגל היא $\bar{I} = 2.5 \cdot 10^{-4}\, W/m^2$.
הגל מתקדם בתווך בעל: $v = 340 m/\sec$, $\gamma = 1.48$, $P_0 = 0.7 \cdot 10^4\, N/m^2$.
מצאו ביטוי לשינוי בלחץ כתלות במיקום ובזמן, אם ידוע שהגל הוא גל סינוס.

6) דוגמה- חישוב ירידה של העוצמה

מקור מייצר גל קול כדורי. חיישן בעל שטח חתך של $0.2m^2$ ממוקם במרחק $r_1 = 0.8m$ מהמקור ומודד הספק של $P = 3mW$.

א. מהי העוצמה של הגל במרחק r_1?

ב. מהו ההספק של המקור?

ג. מה העוצמה של הגל במרחק $r_2 = 1.2m$?

ד. מה ההספק שימדוד החיישן במרחק r_2?

7) תרגיל - חליל בצליל לה

מה צריך להיות אורכו של חליל, על מנת שהתנודה הבסיסית שלו תהיה הצליל לה -כלומר תדר 440Hz? הניחו שמהירות הקול היא $340\,{}^{m}/_{s}$ ושניתן להתייחס לחליל כצינור הפתוח בשני קצותיו.

8) תרגיל - כמה תדירויות נמצאות בתחום השמיעה

צינור באורך של $1m$ מרעיש כאשר הרוח נושבת . מהירות הקול היא $340\,{}^{m}/_{s}$

א. אם הצינור פתוח בשני קצותיו , כמה מתוך ההרמוניות שלו נמצאות בתחום השמיעה? $(20Hz - 20kHz)$

ב. ציירו את החלק המרחבי של ψ_p עבור שלושת ההרמוניות הראשונות, במקרה שבו הצינור פתוח רק בצד אחד.

9) תרגיל - רזולוציית מדידה של עטלף

עטלפים משתמשים בגלי קול בשביל למפות את המרחב (בדומה ל״סונר״). נניח כי עטלף שולח גלי קול אל חפץ מסוים ומודד את מיקומו ביחס אליו על ידי מדידת הזמן שלוקח לגלי הקול לחזור אליו מהחפץ.

א. בהנחה שהעטלף והחפץ עומדים במקומם, מה צריכה להיות רזולוציית המדידה של העטלף? כלומר, מהו הזמן הכי קצר שהוא צריך למדוד, על מנת לזהות חפץ הנמצא במרחק 40cm ממנו?

ב. בהנחה שגודל החפץ הכי קטן שהעטלף מסוגל לזהות הוא בסדר גודל של אורך הגל שהעטלף מייצר, מה יהיה התדר אותו צריך העטלף לייצר על מנת לזהות חפץ בגודל של 1cm? הניחו כי מהירות הקול היא $340\,{}^{m}/_{s}$.

10) תרגיל - ערכי RMS

ערך RMS של פונקציה מחזורית בזמן בעלת זמן מחזור T מוגדר כך:

$$f_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,\mathrm{dt}} = \sqrt{\langle f^2\rangle}$$

ההפרעה בלחץ בגל קול מישורי נתונה ביחידות פסקל לפי:

$$\psi_P(x,t) = 6\cdot 10^{-6}\cos(kx-\omega t)$$

נתון גם:

$P_0 = 0.8\cdot 10^4\,N/m^2\,, \gamma = 1.4\,, \mathrm{v} = 340\mathrm{m/\sec}\,, \omega = 7000 rad/sec$.

א. מהו אורך הגל?

ב. מהו ערך ה-RMS של התנודות בלחץ?

ג. מהו ערך ה-RMS של המהירות החומרית בגל?

ד. מהו הערך הממוצע בזמן של צפיפות האנרגיה הנפחית $u = \frac{E}{V} = \frac{\varepsilon}{A}$?

ה. מהו ההספק הממוצע בזמן הנקלט בגלאי בעל שטח של $0.15m^2$, המאונך לכיוון התקדמות הגל?

11) תרגיל - גל קול כדורי וערכי RMS

מקור מייצר גל קול כדורי הרמוני בתדר $500Hz$. ערך ה-RMS של הלחץ במרחק $r_1 = 30cm$, הוא $4\,N/m^2$.

נתון גם: $P_0 = 10^5\,N/m^2\,, \gamma = 1.5\,, \mathrm{v} = 330\mathrm{m/\sec}$.

א. מהו ערך ה-RMS של הלחץ במרחק $r_2 = 15m$?

ב. מהו ערך ה-RMS של פונקציית ההעתק באותו המיקום?

ג. מהו הערך הממוצע בזמן של צפיפות האנרגיה הנפחית $u = \frac{E}{V} = \frac{\varepsilon}{A}$ באותו מיקום?

תשובות סופיות

1) לא

2) 0.30mm

3) 18144J

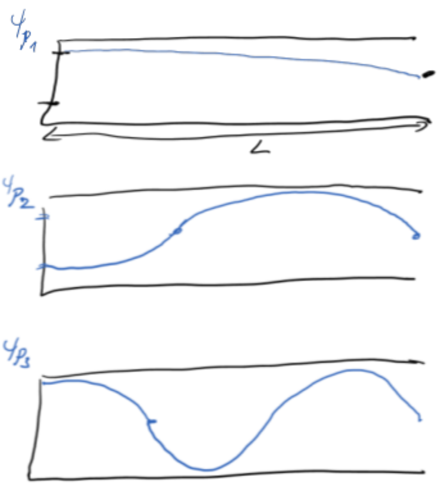
4) 1.26

5) $\psi(x,t)=0.123\sin\left(222x-75.4\cdot10^{3}t\right)$

6) א. $15\cdot10^{-3}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ ב. 0.121W ג. $6.67\cdot10^{-3}\,\frac{\text{W}}{\text{m}^2}$ ד. 1.33mW

7) 0.39m

8) א. 117 ב.



9) א. 2.35ms ב. 34kHz

10) א. 0.31m

ב. $4.24\cdot10^{-6}\,Pa$

ג. $1.29\cdot10^{-7}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

ד. $1.6\cdot10^{-15}\,\frac{\text{s}}{\text{m}^2}$

ה. $8.18\cdot10^{-14}\,\text{W}$

11) א. $0.08\,\frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ ב. $5.6\cdot10^{-8}\,\text{m}$ ג. $4.3\cdot10^{-8}\,\frac{\text{s}}{\text{m}}$

אפקט דופלר

רקע

עבור מקור נע וצופה נייח:

$$f' = f_s \frac{1}{1-\frac{v_s}{v}}$$

f' - התדר המוסט.

v_s - מהירות המקור, חיובית עם כיוון התקדמות הגל.

f_s - תדירות המקור (התדירות שהצופה היה קולט אם המקור לא היה זז).

v - מהירות הגל.

עבור מקור וצופה נעים:

$$f_0 = f_s \frac{v+v_0}{v-v_s}$$

f_0 - התדר המוסט (התדר שקולט צופה שנע).

v_0 - מהירות הצופה, חיובית נגד כיוון התקדמות הגל.

גלי הלם:

$$\sin\theta = \frac{v}{v_s}$$

θ - חצי מזווית הראש של קונוס גל ההלם.

שאלות

1) מציאת המהירות של גוף בתנועה הרמונית

גוף קטן בעל מסה m נע בתנועה הרמונית. הגוף משדר גל קול באופן רציף.
מודדים את התדירות המינימלית והמקסימלית של גלי הקול הנקלטים מהגוף.
חשבו את האנרגיה הקינטית של הגוף באמצעות התדירויות.
הניחו שהבעיה חד מימדית.

2) מקור נע בתאוצה*

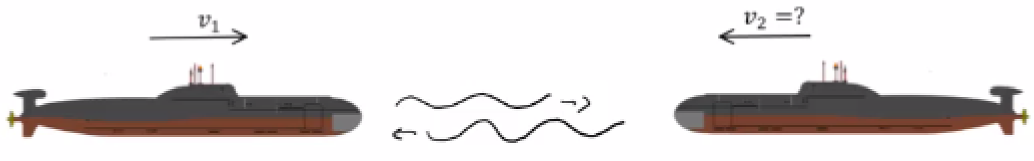
מקור נע במהירות v_s לכיוון צופה נייח הנמצא במרחק L ופולט גלי קול
בתדירות f_s (תדירות המקור). המקור מתחיל להאיץ בתאוצה קבועה a.
מהי התדירות אותה ימדוד הצופה כתלות בזמן? ניתן להניח כי: $aT << v_s$ וכי
הצופה תמיד רחוק מהמקור. שימו לב כי לגל לוקח זמן להגיע לצופה.

3) נמלה מטיילת על מיתר

במיתר אינסופי קיימת הפרעה מהצורה: $\psi(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$
כאשר אורך הגל ומהירות הגל הן: $\lambda = 0.4\text{m}$, $v = \frac{7\text{m}}{\text{sec}}$.
נמלה מטיילת על המיתר במהירות $0.2\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ בכיוון הפוך לכיוון התקדמות הגל.
כמה פעמים עולה ויורדת הנמלה כל שניה?

4) מדידת מהירות של צוללת

צוללת נעה במהירות: $v_1 = \frac{19\text{m}}{\text{sec}}$ מזהה צוללת נוספת הנעה לכיוונה.
בצוללת יש סונר המייצר גלי קול בתדר קבוע: $f = 1000\text{Hz}$.
גלי הקול פוגעים בצוללת השנייה וחוזרים לסונר. התדר של הגל
המוחזר שמודד הסונר הוא: $f' = 1060\text{Hz}$.
ידוע שמהירות הגלים במי ים היא: $v = 1519\frac{\text{m}}{\text{sec}}$.
חשבו את מהירות הצוללת השנייה (ביחס לקרקע).



5) פעימות של גל המוחזר מפגיעה בקיר

אדם העומד הרחק מקיר מחזיק מקור שפולט צלילים בתדירות 280Hz.

האדם מתחיל לנוע לכיוון הקיר, עם המקור בידיו, במהירות $3\dfrac{\text{m}}{\text{sec}}$.

הניחו שמהירות הקול היא: $330\dfrac{\text{m}}{\text{sec}}$.

א. מה תדירות הצליל אותה היה שומע מאזין הנמצא ליד הקיר במנוחה?

ב. אילו האדם שנע היה יכול להאזין רק לגל המוחזר מהקיר,
מה תדירות הצליל שהוא היה שומע?

ג. נניח שעוצמת הגל המוחזר מהקיר זהה לזו של הגל הפוגע.
מה התדר ששומע האדם שנע ומהי תדירות הפעימות של גל זה?

תשובות סופיות

1) $$E_k = \frac{1}{2}mv^2\left(\frac{f_{\max} - f_{\min}}{f_{\max} + f_{\min}}\right)^2$$

2) $$f_s = \frac{1}{1 - \dfrac{v_s + a\left(t - \dfrac{L}{v}\right)}{v}}$$

3) 18

4) $34.8\dfrac{\text{m}}{\text{sec}}$

5) א. 283Hz ב. 285Hz

ג. תדירות הגל היא: 283Hz ותדירות הפעימות היא: 2.6Hz.

תורת הגלים להנדסה רפואית

פרק 7 - גלים אלקטרו-מגנטיים

תוכן העניינים

משוואת הגלים האלקטרומגנטיים

רקע:

משוואות מקסוול בהיעדר מטענים וזרמים חופשיים:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \qquad \vec{\nabla}\times\vec{H}=-\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$

בחומר איזוטרופי ולינארי מתקיים:

$$\vec{B}=\mu\vec{H}$$

$$\vec{D}=\varepsilon\vec{E}$$

משוואת הגלים עבור השדה החשמלי והמגנטי:

$$\vec{\nabla}^2\vec{E}=\frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

כאשר:

$$u=\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

ובריק: $u=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=c=3\cdot10^8\,{}^{m}/_{s}$

המשוואה היא עבור כל רכיב בנפרד.
המשוואה זהה לשדה המגנטי.

אינדקס השבירה (מהירות האור בריק חלקי מהירות האור בחומר):

$$n=\frac{c}{u}=\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}$$

תמיד גדול מאחד (מהירות האור בחומר תמיד קטנה מהמהירות בריק):

פתרון למשוואת הגלים במימד אחד:

$$E_x(x,t)=A\cos(kx-\omega t)$$

$$\mathrm{k}=\frac{2\pi}{\lambda},\quad \omega=2\pi f=\frac{2\pi}{T}$$

מעבר לייצוג קופלקסי: $\cos(kx-\omega t) = Re\left[e^{i(kx-\omega t)}\right]$.

כשעובדים עם הייצוג הקומפלקסי ניתן לעבוד רק עם החלק התלוי במרחב (או השדה ב-$t=0$) ובסוף להכפיל את הפונקציה ב- $e^{-i\omega t}$ בשביל לקבל את התלות בזמן.

יחס הדיספרסיה - הקשר בין התדירות למספר הגל:

$$\omega = uk$$

אם היחס לא לינארי אז צריך להבדיל בין מהירות הפאזה למהירות החבורה:

$$u_{ph} = \frac{\omega}{k}\ , u_g = \frac{d\omega}{dk}$$

גל אלקטרומגנטי מישורי

רקע:

הצורה הכללית של הפתרון ההרמוני:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

כאשר:

וקטור הגל - $\vec{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z}$

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z$$

הערות – תמיד אפשר להוסיף גם פאזה.

יחס הדיספרסיה בגל: $\omega = u|k| = u\sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$.

הכיוון של $\vec{k}$ הוא כיוון התקדמות הגל ובגל מישורי תמיד $\vec{E} \perp \hat{k}$.

לכיוון של $\vec{E}$ (המסומן בדר"כ ב-$\hat{n}$) קוראים כיוון הקיטוב של הגל.

השדה המגנטי בגל:
כיוון השדה המגנטי מאונך לשדה החשמלי ולכיוון התקדמות הגל.
התלות בזמן ובמרחב של השדה המגנטי זהה לזו של השדה החשמלי.
(אותו קוסינוס עם אותו ארגומנט).

$$\vec{B} = \frac{1}{u}\hat{k} \times \vec{E} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega}$$

ה**עכבה** של התווך: $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$

בריק: $\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \eta_0 = 120\pi$

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta}\hat{k} \times \vec{E},$$

$$\vec{E} = -\eta\hat{k} \times \vec{H}$$

וקטור פוינטינג (האנרגיה שהגל נושא) - כמות אנרגיה ליחידת שטח ליחידת זמן.

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

בנוסחה מציבים את הביטוי הממשי של השדות.

הכיוון של $\vec{S}$ הוא בכיוון של $\hat{k}$ (כיוון התקדמות הגל).

הממוצע של הוקטור פוינטינג בזמן (נקרא גם ה**עוצמה** של הגל):

$$\vec{S}_{Avg} = \langle\vec{S}\rangle = \mathrm{Re}\left\{\frac{\vec{\tilde{E}} \times \vec{\tilde{H}}^*}{2}\right\}$$

$\vec{\tilde{E}}$ ו- $\vec{\tilde{H}}$ הם הייצוג הקומפלקסי של השדות.

המרה של הנגזרות בזמן ובמרחב:

$$\frac{\partial}{\partial t} \to -\mathrm{i}\omega$$

$$\vec{\nabla} \to \mathrm{i}\vec{k}$$

שאלות:

1) **דוגמה - חישוב כל הגדלים הבסיסיים**

השדה החשמלי של גל א"מ המתקדם בחומר לא מגנטי נתון בביטוי הבא: $\vec{E} = 4\pi\cos(10^9 t - 6x)\hat{y}\frac{mV}{m}$.

א. מהו התדר של הגל ומהו אורך הגל?

ב. מהו מקדם השבירה והקבוע הדיאלקטרי של החומר?

ג. מהו $\vec{H}$ ומהו וקטור פוינטינג הממוצע?

2) **דוגמה 2 - חישוב כל הגדלים 2**

השדה: $\vec{H} = H_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(2\pi x - 6\pi y - 10^8\pi t)} \cdot \frac{3\hat{x}+\hat{y}}{\sqrt{10}}$ מתפשט בתווך לא מגנטי.

מצאו את:

א. וקטור הגל ואורך הגל.

ב. תדר הגל.

ג. מהירות הגל בתווך ומקדם השבירה.

ד. המקדם הדיאלקטרי והעכבה.

ה. השדה החשמלי.

תשובות סופיות:

1) א. $f=1.59\cdot10^{8}\,Hz\;,\;\lambda=\frac{\pi}{3}m$.
ב. $n=1.8\;,\;\varepsilon_r=3.24$.
ג. $\vec{H}=6\cdot10^{-5}\cos\left(6x-10^{9}t\right)z\frac{A}{m}\;,\;\vec{S}_{AVg}=12\pi\cdot10^{-8}\hat{x}$.

2) א. $\vec{K}=2\pi\left(1,-3,0\right)\;,\;\lambda=\frac{1}{\sqrt{10}}m$.
ב. $f=5\cdot10^{7}\,Hz$.
ג. $u=5\cdot\sqrt{10}\cdot10^{6}\frac{m}{\sec}\;,\;n=18.97$.
ד. $\varepsilon_r=360\;,\;\eta=2\pi\cdot\sqrt{10}$.
ה. $\vec{E}\left(x,y,t\right)=-2\pi\cdot\sqrt{10}\cdot H_0e^{i\left(2\pi x-6\pi y-10^{8}\pi t\right)}\hat{z}$.

קיטוב מעגלי ואליפטי

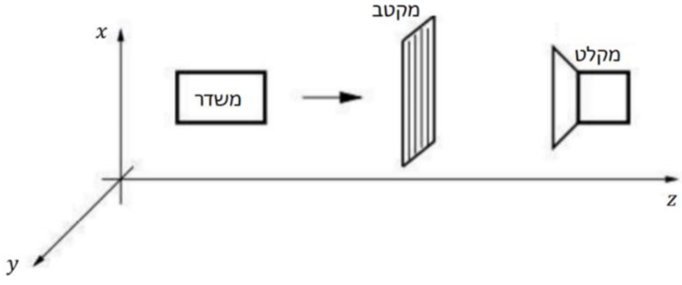
רקע:

הקיטוב של הגל נקבע על ידי כיוון השדה החשמלי (לא לבלבל עם כיוון הגל).
מקטב - מודד את הקיטוב של הגל.
קיטוב לינארי - כיוון השדה קבוע.
קיטוב מעגלי ימני - רכיב y מפגר אחרי רכיב x ב-$90°$.
כלומר הפאזה של רכיב y פחות הפאזה של רכיב x שווה $\varphi = \frac{\pi}{2}$.
השדה מסתובב נגד השעון או בהתאם לכלל יד ימין ביחס לציר ה-z.
קיטוב מעגלי שמאלי - רכיב y מקדים את רכיב x ב-$90°$.
($\varphi = -\frac{\pi}{2}$ השדה מסתובב עם השעון או הפוך לכלל יד ימין ביחס לציר ה-z).
קיטוב אליפטי - מתקבל כאשר יש הפרש פאזה של $90°$ והאמפליטודה של הרכיבים שונה או אם הפרש הפאזה שונה מ-$90°$.

שאלות:

1) דוגמה חשובה - שינוי עוצמה ממקטבים

נתונה המערכת הבאה:



במערכת, המשדר יכול לייצר גל הנע בכיוון z בכל קיטוב שנרצה.
והמשדר יכול למדוד גל בכל קיטוב שמגיע אליו.
המקטב מורכב מרשת מתכתית כפי שמתואר באיור.
כיוון המקטב מוגדר לפי כיוון הרכיב של השדה שעובר, כלומר במאונך לרשת.

א. עבור המצב של המקטב בתמונה נתון כי המקלט אינו קולט סיגנל. רשמו את פונקציית הגל שמייצר המשדר.

ב. עבור אותו גל מוסיפים לפני המקטב הקיים מקטב זהה נוסף בזווית של 30 מעלות ביחס לציר ה-x.
מה היחס בין העוצמה שימדוד הגלאי לעוצמה שיוצאת מהמשדר?

2) דוגמה - קיטוב לינארי ומעגלי

מצאו את הקיטוב של השדה במקרים הבאים.

עבור קיטוב לינארי רשמו את כיוון הקיטוב וזווית הקיטוב.

א. $\vec{E}=E_0\cos(kz-\omega t)\,\hat{x}+3E_0\cos(kz-\omega t)\,\hat{y}$.

ב. $\vec{E}=E_0\cos\left(kz-\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\hat{x}+E_0\cos(kz-\omega t)\,\hat{y}$.

ג. $\vec{E}=E_0\cos(kz+\omega t)\,\hat{x}+E_0\cos\left(kz+\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\hat{y}$.

ד. $\vec{H}=H_0\cos\left(kz-\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\hat{x}+H_0\cos\left(kz-\omega t+\frac{\pi}{2}\right)\hat{y}$.

תשובות סופיות:

1) א. $\vec{E}(z,t)=E_0\hat{x}\cos(kz-\omega t)$ ב. $\frac{3}{16}$

2) א. קיטוב ליניארי, $\theta=72^\circ$, $\hat{n}=\frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)$.

ב. קיטוב מעגלי שמאלי. ג. קיטוב מעגלי ימני.

ד. קיטוב ליניארי, $\theta=-45^\circ$, $\hat{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$.

פגיעה ישרה בתווך דיאלקטרי

רקע:

כאשר גל הנע בתווך אחד פוגע בשפה של תווך אחר נקבל גל עובר וגל מוחזר
תדירות כל הגלים זהה ושווה לתדירות המקוראת אמפליטודות הגל העובר והגל המוחזר נקבל מתנאי השפה.

$$B_{2\perp} = B_{1\perp} \qquad D_{2\perp} - D_{1\perp} = \sigma_{free}$$

$$H_{2||} - H_{1||} = k_{\text{free}} \qquad E_{2||} = E_{1||}$$

σ_{free} - היא צפיפות המטען המשטחית והחופשית על השפה

k_{free} - צפיפות הזרם המשטחי והחופשי על השפה

בפגיעה ישרה (או פגיעה בניצב) לשני השדות רכיב מקביל לשפה בלבד.

בתווך דיאלקטרי: $\sigma_{free} = \mathrm{k}_{free} = 0$

הקשר בין האמפליטודות:

$$\frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{2n_1}{n_1 + n_2}$$

$$\frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$$

<u>השוויון השני נכון רק אם</u>: $\mu_1 = \mu_2$ (זה המצב ברוב המקרים).

לא לבלבל בין n ל-η.

מקדם העברה:

$$\tau = \frac{E_t}{E_0}$$

מקדם החזרה:

$$\Gamma = \frac{E_r}{E_0}$$

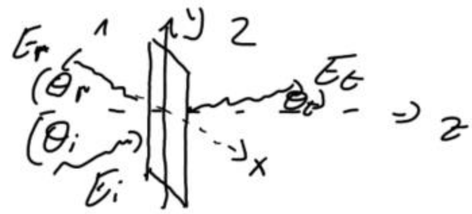
בפגיעה ישרה בתווך דיאלקטרי:

$$1 + \Gamma = \tau$$

פגיעה בזווית בתווך דיאלקטרי

רקע:

מישור השפה בין החומרים (מישור xy באיור).
מישור הפגיעה הוא המישור של וקטורי הגל (מישור yz באיור).



משיקולי סימטריה k_y זהה לכל הגלים.

$$\theta_i = \theta_r$$

חוק סנל: $\frac{\sin\theta_t}{\sin\theta_i} = \frac{u_t}{u_i} = \frac{n_i}{n_t}$

אם: $n_i > n_t$ אז קיימת **זווית קריטית**.
אם זווית הפגיעה גדולה מהזווית הקריטית אז לא יהיה גל עובר או תהיה החזרה מלאה:

$$\theta_c = \text{shiftsin}\left(\frac{n_t}{n_i}\right)$$

משוואות פרנל:
עבור פגיעה בזווית עם קיטוב אנכי (השדה החשמלי מאונך **למישור הפגיעה**):

$$\Gamma^{\perp} = \frac{E_{r_0}^{\perp}}{E_{i_0}^{\perp}} = \frac{\eta_2\cos\theta_i - \eta_1\cos\theta_t}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t} = \frac{n_1\cos\theta_i - \frac{\mu_1}{\mu_2}\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_i}}{n_1\cos\theta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2}\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_i}}$$

$$\tau^{\perp} = \frac{E_{t_0}^{\perp}}{E_{i_0}^{\perp}} = \frac{2\eta_2\cos\theta_i}{\eta_2\cos\theta_i + \eta_1\cos\theta_t} = \frac{2n_1\cos\theta_i}{n_1\cos\theta_i + \frac{\mu_1}{\mu_2}\sqrt{n_2^2 - n_1^2\sin^2\theta_i}}$$

$$1 + \Gamma^{\perp} = \tau^{\perp}$$

עבור פגיעה בזווית עם קיטוב מקבילי (השדה החשמלי מקביל **למישור הפגיעה**):

$$\Gamma^{||}=\frac{E_{r_0}^{||}}{E_{i_0}^{||}}=\frac{\eta_2\cos\theta_{\mathrm{t}}-\eta_1\cos\theta_{\mathrm{i}}}{\eta_2\cos\theta_{\mathrm{t}}+\eta_1\cos\theta_{\mathrm{i}}}=\frac{\frac{\mu_1}{\mu_2}n_2^2\cos\theta_i-n_1\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2\theta_i}}{\frac{\mu_1}{\mu_2}n_2^2\cos\theta_i+n_1\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2\theta_i}}$$

$$\tau^{||}=\frac{E_{t_0}^{||}}{E_{i_0}^{||}}=\frac{2\eta_2\cos\theta_{\mathrm{i}}}{\eta_2\cos\theta_{\mathrm{t}}+\eta_1\cos\theta_{\mathrm{i}}}=\frac{2n_1\,n_2\cos\theta_i}{\frac{\mu_1}{\mu_2}n_2^2\cos\theta_i+n_1\sqrt{n_2^2-n_1^2\sin^2\theta_i}}$$

$$1+\Gamma^{||}=\tau^{||}\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}$$

זווית ברוסטר היא הזווית שבה יש העברה מלאה (ואין החזרה).

זווית ברוסטר בקיטוב מקבילי:

$$\sin^2\theta_B{}^{||}=\frac{1-\frac{\mu_{\mathrm{t}}\varepsilon_{\mathrm{i}}}{\mu_{\mathrm{i}}\varepsilon_{\mathrm{t}}}}{1-\left({\varepsilon_{\mathrm{t}}}/{\varepsilon_{\mathrm{i}}}\right)^2}$$

אם: $\mu_2\approx\mu_1$ אז:

$$\sin\theta_B{}^{||}=\frac{1}{1+{\varepsilon_{\mathrm{i}}}/{\varepsilon_{\mathrm{t}}}}$$

$$\tan\theta_B{}^{||}=\frac{n_{\mathrm{t}}}{n_{\mathrm{i}}}$$

בקיטוב אנכי:

$$\sin^2\theta_B{}^{\perp}=\frac{1-\frac{\mu_{\mathrm{i}}\varepsilon_{\mathrm{t}}}{\mu_{\mathrm{t}}\varepsilon_{\mathrm{i}}}}{1-\left({\mu_{\mathrm{i}}}/{\mu_{\mathrm{t}}}\right)^2}$$

* מאוד נדיר למצוא חומרים שקיימת עבורם זווית ברוסטר בקיטוב אנכי.

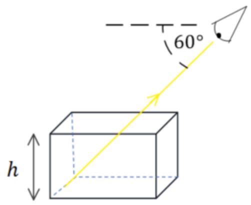
שאלות:

1) תרגיל - צופה מסתכל על תיבה

לתיבת זכוכית ריקה גובה של: $h = 6cm$. צופה מסתכל על התיבה, כאשר הוא מוריד את ראשו בזווית של 60 מעלות מתחת לאופק הוא רואה בדיוק את קצה הבסיס הרחוק של התיבה. ממלאים את התיבה בשמן $n = 1.54$.

איזה נקודה בבסיס התיבה יראה הצופה?

(מצאו את מרחק הנקודה מהקצה הרחוק של בסיס התיבה).

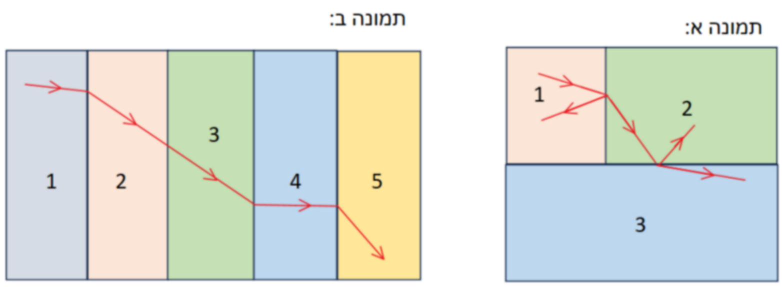


2) תרגיל - שבירה דרך מספר חומרים

בתמונות הבאות מתוארים חומרים בעלי מקדמי שבירה שונים.

גל עובר דרך השכבות כמתואר באיורים. הניחו שהתמונות מדויקות.

דרגו את מקדמי השבירה של החומרים השונים, בכל תמונה, מהקטן לגדול (אין קשר בין התמונות).



3) דוגמה - גל פוגע בזווית במים

גל אלקטרומגנטי מישורי נע באוויר (ריק) ופוגע בזווית בפני הים.

הקבוע הדיאלקטרי של מי ים הוא בערך 80. (הניחו שהמים מתנהגים כמבודד).

א. מצאו את זווית ברוסטר עבור גל בקיטוב מקבילי.

גל המקוטב אנכית פוגע בפני הים בזווית שחישבתם בסעיף א.

ב. מהי זווית ההעברה של הגל?

ג. מה הם מקדמי ההעברה וההחזרה?

4) תרגיל - שבירה במעברים עם זווית קריטית וברוסטר

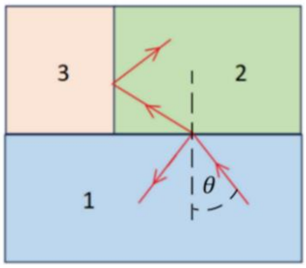
אור נכנס מחומר 1 ועובר שבירה במעבר לחומר 2 כך שחלקו מוחזר וחלקו מועבר, ראו איור. הקרן שהועברה ממשיכה עד לפגיעה בחומר 3 שם היא פוגעת בו בזווית הקריטית ומבצעת החזרה מלאה.

נתון: $n_1 = 1.5,\ \ n_2 = 1.3,\ \ n_3 = 1.1$.

א. מהי הזווית θ שבאיור?

ב. האם צריך להגדיל או להקטין את הזווית θ כך שהאור לא יבצע החזרה מלאה וייכנס לחומר 3?

ג. האם האור יעבור לחומר 3 בהינתן ש-θ היא זווית ברוסטר למעבר בין חומר 1 לחומר 2? (הניחו כי הפרמביליות זהה).



5) תרגיל - גלים בין שני מקטבים

גל בעל קיטוב בכיוון x ואמפליטודה של השדה החשמלי E_0 נע בכיוון z.
הגל עובר דרך שני מקטבים הראשון בעל קיטוב בזווית 20 מעלות עם ציר x והשני בזווית 60 מעלות עם ציר x. בכל הסעיפים ניתן להזניח החזרות מרובות.

א. מהי האמפליטודה והכיוון של הגל העובר את המקטב הראשון?

ב. מהי האמפליטודה והכיוון של הגל העובר את המקטב השני? רשמו ביטוי לגל זה.

ג. בהנחה שהמקטב השני הוא מקטב רשת המחזיר את הרכיב המקביל ללא איבוד אנרגיה לחום. מהי האמפליטודה והכיוון של הגל המוחזר מהמקטב השני?

6) תרגיל - מקטב מערימה של משטחי זכוכית

דרך פשוטה ויעילה לבנות מקטב היא להשתמש בערימה של משטחי זכוכית מיקרוספקופים עם מרווחים ביניהם. הרעיון הוא לנצל את ההבדל בין מקדמי ההעברה של הרכיב המקביל והמאונך. בזווית ברוסטר ישנה העברה מלאה של הרכיב המקביל בעוד שרק חלק מהרכיב המאונך עובר, כלומר זהו סוג של מקטב. נניח שיש לנו חתיכה אחת של זכוכית והפגיעה בה היא בזווית ברוסטר.

א. מצאו את זווית ברוסטר עבור הפגיעה בזכוכית (מאוויר) בעלת מקדם שבירה $n = 1.46$ (מקדם השבירה תלוי באורך הגל, הניחו שזה מקדם השבירה עבור אורך הגל שבבעיה וכי הפרמביליות אחידה).

ב. מצאו את זווית ההעברה, האם היא תלויה בקיטוב?

ג. הראו כי זווית הפגיעה ביציאה מהזכוכית היא זווית ברוסטר לאותו מעבר.

ד. מצאו את מקדמי ההעברה לכל רכיב ($\tau^{\perp}$, $\tau^{\parallel}$) עבור היציאה מהזכוכית.

מקדמי ההחזרה וההעברה של האנרגיה עבור שני הרכיבים מוגדרים באופן הבא: $T = \frac{n_t \cos\theta_t}{n_i \cos\theta_i}|\tau|^2$.

מקדם ההעברה הכולל הוא מכפלה של מקדם ההעברה בכניסה של האור לזכויות במקדם ההעברה של היציאה של האור מהזכוכית.

ניתן להזניח החזרות מרובות.

ה. מהו מקדם ההעברה הכולל של האנרגיה עבור כל רכיב.

ו. נגדיר את יעילות המקטב לפי: $e = \frac{T^{\parallel}}{T^{\perp}}$ לכמה שכבות נזדקק על מנת להגיע ליעילות של $e = 10^4$

תשובות סופיות:

1) 1.4cm.

2) תמונה א: $n_1 > n_2 > n_3$, תמונה ב: $n_5 < n_3 = n_2 < n_1 < n_4$.

3) א. $\theta_B" = 84°$. ב. $\theta_t = 6.4°$.

ג. $\Gamma^{\perp} = -0.975$, $\tau^{\perp} = 0.025$.

4) א. $\theta \approx 27.5°$ ב. צריך להגדיל את טטה. ג. האור ייכנס.

5) א. $E_0 \cos(20°)$ בכיוון: $\cos(20°)\hat{x} + \sin(20°)\hat{y}$.

ב. $\vec{E}(z,t) = E_0 \cos(20°)\cos(40°)\left(\cos(60°)\hat{x} + \sin(60°)\hat{y}\right)\cos(kz - \omega t)$.

ג. $E_0 \cos(20°)\sin(40°)$ בכיוון: $\cos(30°)\hat{x} - \sin(30°)\hat{y}$.

6) א. $\theta_B \approx 55.6°$ ב. $\theta_t \approx 34.4°$ לא תלויה בקיטוב.

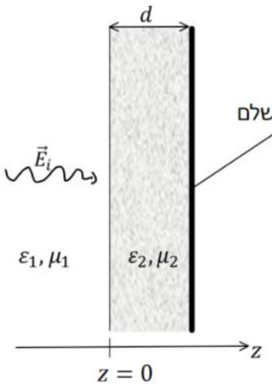
ג. $\tau^{\perp} = 1.36$ $\tau^{"} = 0.685$ ד. $\tau^{\perp} = 0.754$ $\tau^{"} = 1$ ה. 33

מעבר של יותר מתווך אחד

רקע:

נציב את תנאי השפה עבור כל ממעבר.

שאלות:



1) **שכבת חומר דיאלקטרי ליד מוליך מושלם**

גל הנע בתווך דיאלקטרי בעל ε_1, μ_1 פוגע בניצב לשכבה בעובי d עם ε_2, μ_2 ומוחזר ממוליך מושלם הנמצא בקצה השכבה, ראו איור. השדה החשמלי של הגל נתון לפי: $\vec{E}_i(z,t) = E_{i0}\,\hat{x}\cos\omega\left(\frac{z}{u} - t\right)$.

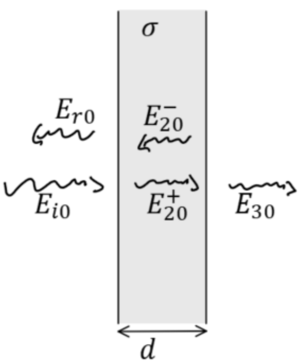
מצאו את:

א. $\vec{E}_r(z,t)$.

ב. $\vec{E}_1(z,t)$.

ג. $\langle s_1 \rangle$.

ד. העובי d עבורו לא ניתן יהיה לזהות את השכבה.



2) **גל עובר דרך פיסת נחושת**

גל אלקטרומגנטי מישורי בתדירות $10\ MHz$ עם אמפליטודה E_{i0} פוגע בניצב לפיסת נחושת ($\sigma = 5.80 \cdot 10^7\ \frac{S}{m}$) דקה מישורית בעובי d השווה לעומק החדירה.

הזניחו החזרות מסדר שני ומעלה וחשבו את:

א. האמפליטודות של כל שאר הגלים: $E_{r0}, E_{20}^+, E_{20}^-, E_{30}$ כתלות ב-E_{i0}.

ב. $\frac{\langle s_3 \rangle}{\langle s_{1i} \rangle}$.

3) **חישוב כל הגדלים**

השדה החשמלי של גל מישורי הנע בתווך הומוגני נתון לפי הביטוי: $\vec{E} = \cos(z + 2\pi \cdot 10^7 t)\hat{y}$ ביחידות של וולט למטר.

א. מהו תדר הגל (בהרץ)?

ב. מהו כיוון התקדמות הגל?

ג. מהו אורך הגל?

בהנחה כי: $\mu = \mu_0$ מצאו את המקדם הדיאלקטרי היחסי של החומר.

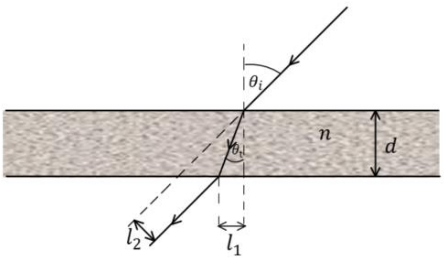
רשמו ביטוי ל-$\vec{H}$.

ד. רשמו ביטוי לווקטור פוינטינג הממוצע בזמן.

4) ציירו קיטוב אליפטי

ציירו את אליפסת הפולריזציה (האליפסה אותה "מצייר" קצהו של ווקטור השדה החשמלי במישור המאונך לכיוון התקדמות הגל כאשר הצופה מודד אותו לאורך זמן בנקודה קבועה) עבור הגל: $\vec{E} = (5i\hat{x} - \hat{y})e^{-i(\pi z+\omega t)}$.

5) חישוב הזזה לטרלית (חוק סנל)



קרן אור נעה באוויר ופוגעת בזווית θ_i בחומר שקוף בעובי d בעל אינדיקס שבירה n.

א. מצאו את זווית ההעברה.

ב. מצאו את המרחק של נקודת היציאה l_1.

ג. מצאו את ההזזה הלטרלית (המרחק l_2 באיור).

6) תרגיל - אלכוהול מזויף

רועי קנה בקבוק יוקרתי של משקה ג'ין ורוצה לוודא שהאלכוהול אינו מזויף. אלכוהול מזויף מכיל כמות גבוה של אתנול במקום מתנול. לרועי יש שני מצביעי לייזר באורכי גל של $532nm$ ו- $638nm$. הוא מכוון את הלייזר בזווית 30 מעלות כלפי מעלה ולמרכז הבקבוק ומודד את הגובה h ממנו יוצאת קרן האור, ראו איור. קוטר הבקבוק הוא 12cm. את מקדמי השבירה של מתנול ואתנול ניתן למצא באינטרנט והקירוב שלהם עבור תחום אורכי גל: $\lambda \in [0.4\mu m, 0.8\mu m]$ הוא:

מתנול: $n(\lambda) \approx -0.8\lambda^3 + 1.8\lambda^2 - 1.4\lambda + 1.7$

אתנול: $n(\lambda) \approx -0.1\lambda^3 + 0.3\lambda^2 - 0.3\lambda + 1.4$

בנוסחה יש להציב את אורך הגל הנמדד באוויר ב - μm.

לצורך הפשטות נניח כי הבקבוק מכיל 100% אתנול או מתנול.

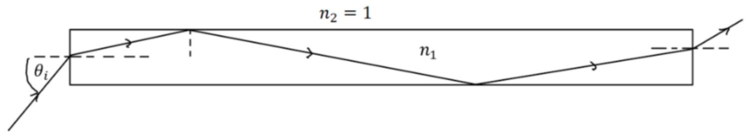
א. ציירו באמצעות מחשב גרף של $n(\lambda)$ עבור מתנול ואתנול על אותו גרף.

ב. ציירו באמצעות מחשב את זווית ההעברה כתלות ב- λ.
על איזה מהלייזרים תמליצו לרועי להשתמש?

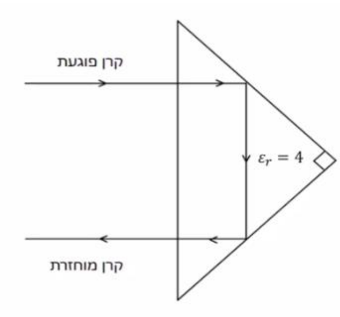
ג. מצאו את הערך של h עבור כל אחד מסוגי החומרים.

7) גל א"מ לא יוצא מסיב אופטי

סיב אופטי ישר עשוי מחומר דיאלקטרי שקוף בעל אינדקס שבירה n_1.
גל אלקטרו מגנטי נכנס בצידו האחד של הסיב בזווית θ_i ופוגע בדפנות של הסיב במהלך ההתקדמות.
מהו n_1 המינימלי כך שהגל לא יצא מהסיב עד אשר יגיע לקצה השני ללא תלות בזווית הפגיעה θ_i.



8) אור מוחזר מפריזמה משולשת



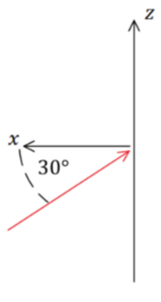
אור נכנס ומוחזר מפריזמה משולשת העשויה זכוכית.
מסלול קרן האור מתואר באיור.
מהו אחוז עוצמת האור של הקרן המוחזרת.
הניחו $\varepsilon_r = 4$ עבור זכוכית.
הפריזה היא משולש שווה שוקיים וישר זווית.

9) תרגיל - גל פוגע במראה בזווית

גל אלקטרו מגנטי מתקדם במישור xz עם זווית של 30 מעלות ביחס לציר ה-x כפי שמתואר באיור. לגל כיתוב בכיוון y. הגל פוגע במראה מישורית הנמצאת במישור zy ומוחזר ממנה.

א. כתבו את $\hat{k}$ עבור הגל הפוגע והמוחזר.

ב. מהו הכיוון של השדה החשמלי והמגנטי של הגל המוחזר?



תשובות סופיות:

1) א. $\vec{E}_r(z,t)=E_{i0}\cos\left(K_1z+\omega t-2\theta\right)\hat{x}$ כאשר $\tan\theta=\frac{\eta_2}{\eta_1}\tan\left(K_2d\right)$.

ב. $\vec{E}_1(z,t)=E_{i0}\hat{x}\left[\cos\left(K_1z-\omega t\right)+\cos\left(K_1z+\omega t-2\theta\right)\right]$.   ג. $\langle S_1\rangle=0$.

ד. $d=\frac{\pi n}{\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}}$.

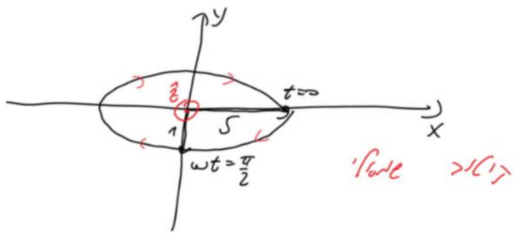
2) א. $\frac{E_{20}^{\ -}}{E_{i0}}\approx(-2.49+4.53i)\cdot10^{-6}$, $\frac{E_{20}^{\ +}}{E_{i0}}\approx(1.90+0.140i)\cdot10^{-6}$, $\frac{E_{r0}}{E_{i0}}\approx-1+4.67\cdot10^{-6}i$

$\frac{E_{30}}{E_{i0}}\approx(-2.70+4.90i)\cdot10^{-6}$.   ב. $\frac{\langle S_3\rangle}{\langle S_1\rangle}=3.13\cdot10^{-11}$.

3) א. $f=10^7\,Hz$.   ב. בכיוון $-\hat{z}$.   ג. $\lambda=2\pi m$.   ד. $\varepsilon_r=22.8$.

ה. $\vec{H}(z,t)=\frac{1}{8\pi^2}\cos\left(z+2\pi\cdot10^7t\right)\hat{x}$.   ו. $\vec{S}_{AVg}=-\frac{\hat{z}}{16\pi^2}$.

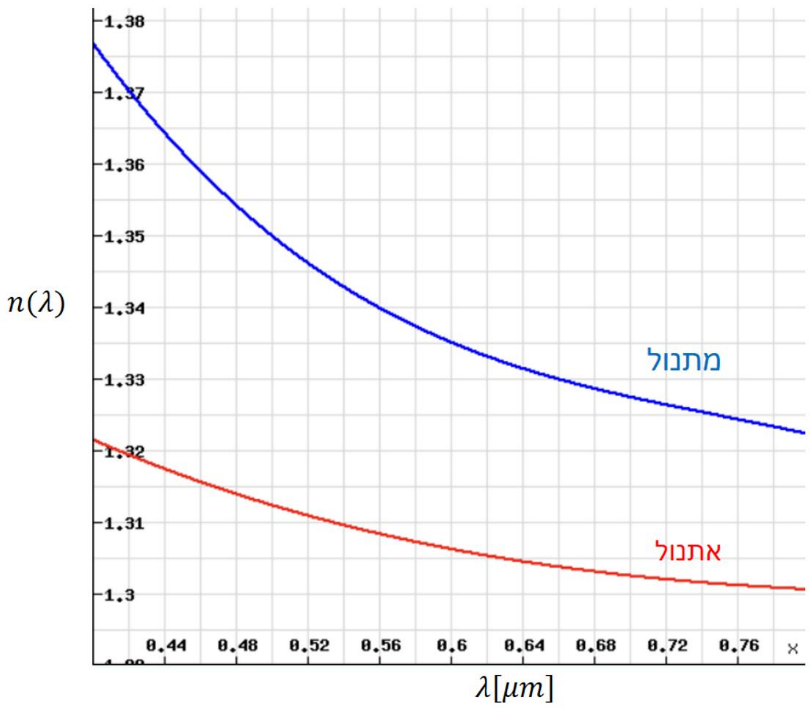
4) שרטוט:



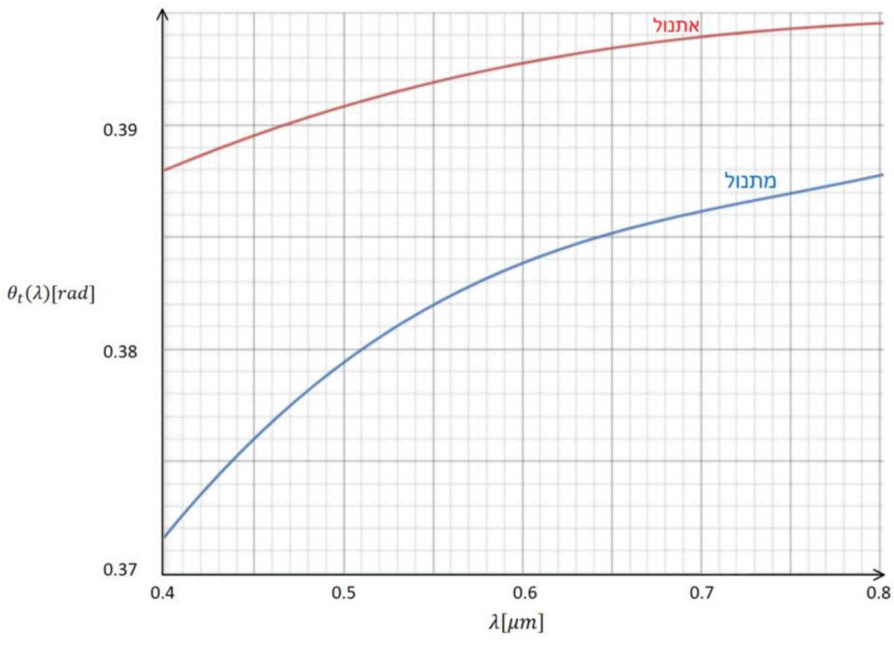
5) א. $\sin\theta_t=\frac{1}{n}\sin\theta_i$.   ב. $l_1=\frac{d\sin\theta_i}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta_i}}$.

ג. $l_2=d\sin\theta_i\left(1-\frac{1}{\sqrt{n^2-\sin^2\theta_i}}\right)$.

6) א. שרטוט:



ב. בלייזר של ה-532 ננומטר.



ג. אתנול – 4.83cm , מתנול - 4.96cm.

7) $\sqrt{2}$.

8) 79%.

9) א. $\hat{k}_r = \frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{z}$, $\hat{k}_i = -\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{z}$ ב. $\hat{E} = -\hat{y}$ ג. $\hat{B}_r = -\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{z} + \frac{1}{2}\hat{x}$

תורת הגלים להנדסה רפואית

פרק 9 - התאבכות בגלים דו ותלת מימדיים

תוכן העניינים

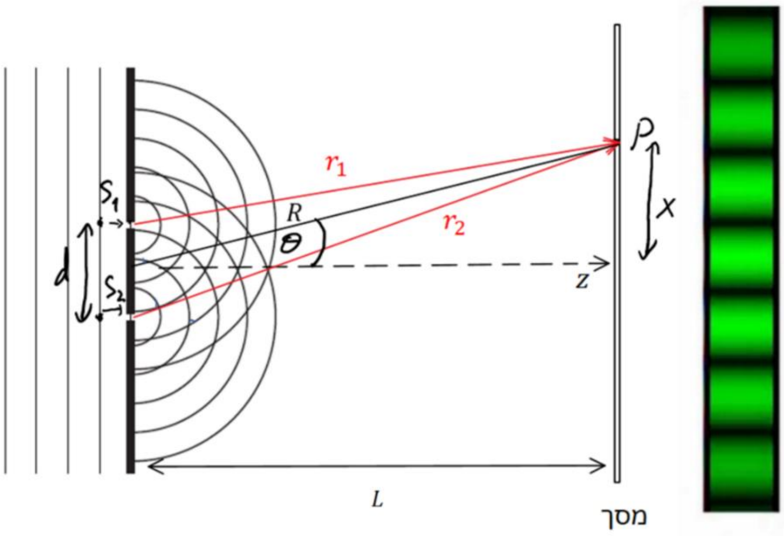
התאבכות בשני סדקים

רקע

עיקרון הוייגנס - ניתן להתייחס לכל נקודה בחזית הגל כמקור נקודתי של גל חדש.

אמפליטודה בגלים גליליים - $A \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$, גלים כדוריים - $A \propto \frac{1}{r}$.

ניסוי שני הסדקים:



קירוב השדה הרחוק far field limit $L \gg d$:

1. $\Delta r << r \rightarrow A_1 \approx A_2$

2. $r_1 \parallel r_2 \rightarrow \Delta r = d\sin\theta$

העוצמה היחסית:

$$\frac{I(\theta)}{I(0)} = \cos^2\left(\frac{k\,\mathrm{d}\sin\theta}{2}\right)$$

קירוב זוויות קטנות:

$$\sin\theta \approx \tan\theta \approx \frac{x}{L}$$

בגלל התלות של האמפליטודה במרחק, צריך להכפיל את התוצאה לעוצמה בקוסינוס
טטה עבור גלים גליליים ובקוסינוס בריבוע עבור גלים כדוריים.
התוספת הזו קשורה למבנה של המסך והיא לא תופיע במסך עגול.
בדר"כ מניחים קירוב זוויות קטנות ואז היא זניחה.

שאלות

1) חישוב מרחק בין כתמים ואורך גל

קרן לייזר עוברת דרך שני סדקים. מרכזו של כתם האור הראשון (לצד כתם האור המרכזי), התקבל בזווית של 8 מעלות.

א. באיזו זווית יופיע כתם האור השני?

ב. מהו אורך הגל של הלייזר אם המרחק בין הסדרים הוא: $d = 2.4\mu m$?

2) תחנת רדיו

תחנת שידור משדרת אותות רדיו בתדר $1200Hz$ באמצעות שתי אנטנות הנמצאות במרחק של $300m$ זו מזו. אם נמקם מקלט במרחק רב משתי האנטנות, באילו כיוונים תתקבל העוצמה הגבוהה ביותר ובאילו הנמוכה ביותר? רשמו את הכיוונים ביחס **לישר המחבר בין שתי האנטנות.**

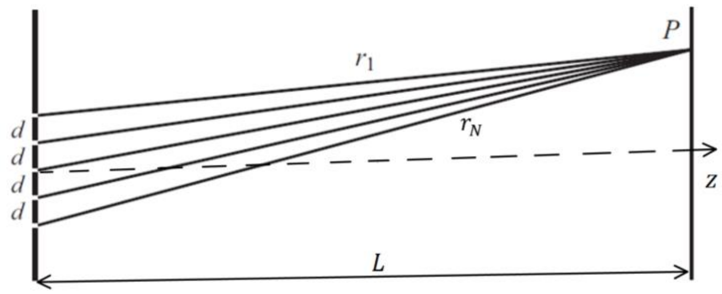
תשובות סופיות

1) א. $16°$ ב. $0.33\mu m$

2) $\cos\alpha_{\max n} = 9.5\cdot10^{-4}n$, $\cos\alpha_{\min n} = 9.5\cdot10^{-4}\left(n+\frac{1}{2}\right)$

התאבכות ב N סדקים

רקע



קירוב השדה הרחוק:

$A_1 \approx A_2 \approx A_3 \approx A_4 \leftarrow \Delta r << r$

$\Delta r = d\sin\theta \leftarrow r_1 \| r_2 \| r_3 \| r_4$

$$\frac{I_{tot}(\alpha)}{I_{tot}(0)} \approx \left(\frac{\sin\left(\frac{N\alpha}{2}\right)}{N\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right)^2$$

$\alpha = kd\sin\theta$

פיק גדול - כשהמכנה מתאפס:

$$\alpha_n = 2\pi n$$

נקודות התאפסות - כשהמונה מתאפס והמכנה לא.

$\alpha_n = \frac{2\pi n}{N}$ ו- $n \neq mN$.

פיק קטן - נגזרת שווה לאפס ומכנה לא מתאפס. עבור $N \gg 1$:

$$\alpha_n = \frac{2\pi}{N}\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

מספר הפיקים באחד הצדדים (ללא הפיק המרכזי) הוא: $\frac{kd}{2\pi}$ (לעגל למטה).

מספר הפיקים (הגדולים) הכולל שווה למספר הפיקים באחד הצדדים כפול 2 ועוד 1.

שאלות

1) פריזמה מתקליטור

בתמונה רואים תקליטור העשוי מחריצים מעגליים בגודל של מיקרון בערך.
האור שפוגע בתקליטור מוחזר למצלמה ומקבלים פריזמה של צבעים.
הסבירו את התופעה (ללא חישוב) וציינו אלו פרמטרים משפיעים עליה.

2) סטייה בזווית פגיעה

הראו שבמקרה שהקרן הפוגעת היא בזווית θ_0 ביחס לאנך עם קיר הסדקים אז תתקבל אותה תבנית התאבכות מוזזת בזווית θ_0. הניחו קירוב זוויות קטנות.

3) 3 מינימות ראשונות

אור מונוכרומטי מלייזר ארגון בעל אורך גל של: $\lambda = 488nm$ עובר דרך סריג בעל 6,000 חריצים בצפיפות של 40,000 חריצים לס"מ ופוגע במסך.
מהן הזוויות של שלושת נקודות המינימום הראשונות (בכיוון החיובי).
הניחו שהחריצים נקודתיים.

4) מרחק בין צבעים

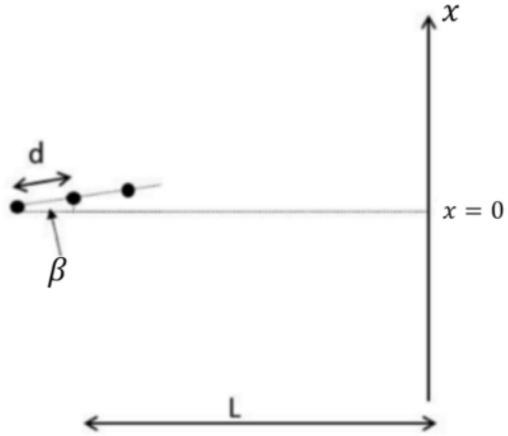
מקרינים אור לבן על סריג בעל 5,000 סדקים לס"מ.

א. תארו מה נראה על המסך מול הסריג.

ב. חשבו את המרחק בין כתם האור האדום השני לכתם האור הכחול השני אם המסך נמצא במרחק 1.5 מטר מהסריג ואורכי הגל של האור האדום והכחול הם $632nm$ ו-$420nm$ בהתאמה.

5) שלושה מקורות קוהרנטיים באוריינטציה שונה

המערכת המתוארת בסרטוט מכילה שלושה מקורות קוהרנטיים במרחק d אחד מהשני הנמצאים בזווית β ביחס לאנך למסך. המרחק למסך הוא L.



מצאו את העוצמה היחסית כתלות ב- x בהנחה כי β זווית קטנה וכי $\theta > \beta$.

תשובות סופיות

1) החריצים בתקליטור יוצרים תבנית התאבכות התלויה באורך הגל, זווית הפגיעה של המקור, בזווית התקליטור ובמיקום הצופה. בכל אזור בתקליטור נוצרת התאבכות בונה עבור אורך גל אחר ולכן רואים את הצבעים השונים בכל אזור. שינוי של הפרמטרים הנ״ל יביא לשינוי התבנית.

2) ראו סרטון.

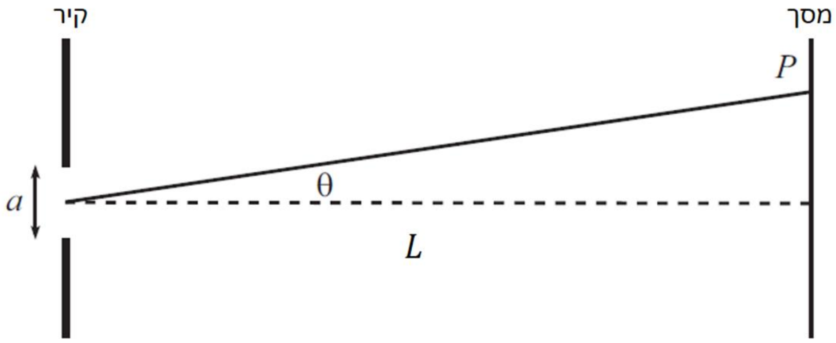
3)
$$\theta_1 \approx 0.0186°$$
$$\theta_2 \approx 0.0373°$$
$$\theta_3 \approx 0.0560°$$

4) א. נקבל תבנית התאבכות של N סדקים שכתם האור המרכזי שלה לבן ובמקום כל כתם אחר נקבל קשת של צבעים כי מיקום הפיק הגדול שאינו במרכז גדל עם אורך הגל.
ב. 70 ס״מ.

5)
$$\alpha = kd\frac{L}{\sqrt{L^2+x^2}}\left[1+\beta\frac{x}{L}\right] \ , \ \frac{I(\alpha)}{I(0)} = \left(\frac{\sin\left(\frac{3}{2}\alpha\right)}{3\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}\right)^2$$

עקיפה

רקע



קירוב השדה הרחוק $L \gg a$:

$$\frac{I(\beta)}{I(0)} = \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\beta\right)}{\frac{1}{2}\beta} \right)^2$$

$$\beta = ka\sin\theta$$

נקי' התאפסות : $\beta_n = 2\pi n$

- אם $\lambda > a$ אז רוחב הפיק המרכזי גדול מאינסוף ולא יהיו נקי' התאפסות וזה אומר שהסדר מתנהג כמו מקור אור נקודתי.
- אם $a \gg \lambda$ אז מקבלים עוצמה קבועה ברוחב הסדק, מתאים למקרה הקלאסי בו מניחים שהאור נע בקווים ישרים.

מקסימום מקומי - נגזרת מתאפסת :

$$\beta_n \approx 2\pi\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

הקשר לפורייה

רקע

האמפליטודה הכוללת על המסך כתלות בזווית:

$$A_{tot}(\theta) = 2\pi FT[B(x)](k')$$

$$k' = k\sin\theta$$

כאשר $B(x)$ היא האמפליטודה ליחידת אורך בסדק.

שאלות

1) לאן נעלם שימור האנרגיה?

א. הראו כי בסדק רחב: $I(0) \propto a^2$ כאשר a הוא רוחב הסדק.
רמז: שימו לב שהאמפליטודה בחלק מהנוסחאות תלויה ברוחב הסדק.

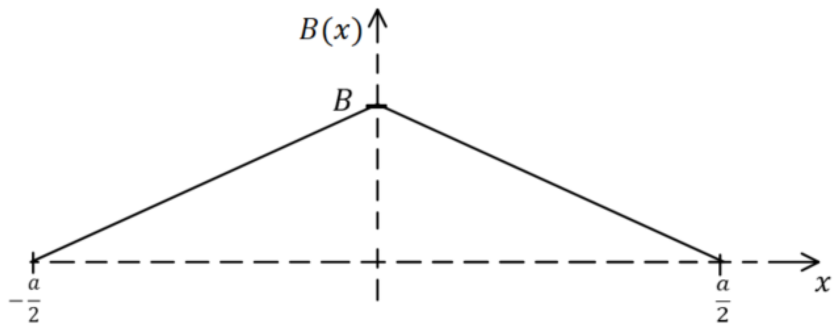
ב. העוצמה היא אנרגיה ליחידת שטח ליחידת זמן. אם נרחיב את רוחב הסדק פי 2 אז $I(0)$ תגדל פי 4. הרחבת הפתח פי 2 מכניסה פי 2 אור ופי 2 אנרגיה איך יתכן שהעוצמה על המסך גדלה פי 4?
לאן נעלם שימור האנרגיה?

2) שינוי בעוצמה כתלות בשינוי הפתח

נניח שיש לנו סדק ברוחב a ואנחנו מסתכלים על העוצמה הממוצעת בנקודה הנמצאת במרחק כלשהו, לא קטן, מהפיק המרכזי אבל עדיין בתחום הזוויות הקטנות.
מה יקרה לעוצמה הממוצעת (ממוצעת בתחום קטן) אם נגדיל את רוחב הפתח?
שימו לב שמצד אחד כשמגדילים את רוחב הפתח אז יותר אור נכנס והעוצמה גדלה אבל מצד שני העקומה מתכווצת והעוצמה בנקודה מסויימת קטנה.
השאלה היא איזה אפקט יותר חזק?

3) אמפליטודה בצורת משולש

נתון סדק ברוחב a דרכו עובר גל בעל חזית (פאזה) אחידה אך בעל אמפליטודה לא אחידה. האמפליטודה ליחידת אורך כתלות ב- x כאשר: $x = 0$ זה מרכז הסדק היא:



מצאו את תבנית ההתאבכות $\left(\frac{I(\theta)}{I(0)}\right)$ המתקבלת על מסך הנמצא במרחק רב מהסדק.

תשובות סופיות

1) א. הוכחה בסרטון.
ב. אם מגדילים את רוחב הסדק אז העוצמה באפס גדלה אבל התבנית מתכווצת והעוצמה קטנה בזוויות אחרות. האנרגיה שווה לאינטגרל על העוצמה לאורך כל המסך והערך של האנרגיה הכוללת יגדל רק פי 2 ולא פי 4.

2) העוצמה לא תשתנה.

3) $\frac{I(\theta)}{I_{max}} = \sin c^4\left(\frac{1}{4}ka\sin\theta\right)$

התאבכות ועקיפה ביחד

רקע

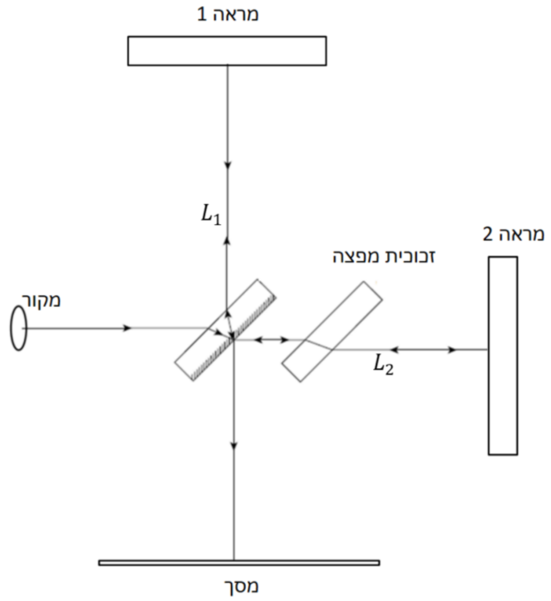
$$\frac{I(\theta)}{I(0)}=\left(\sin c\left(\frac{ka\sin\theta}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{Nkd\sin\theta}{2}\right)}{N\sin\left(\frac{kd\sin\theta}{2}\right)}\right)^2$$

כאשר a הוא רוחב כל סדק, d המרחק בין שני סדקים ו- N מספר הסדקים.

אינטרפרומטריה

רקע

האינטרפרומטר של מייקלסון:



$$\delta = 2(L_2 - L_1)$$

$$\Delta\varphi = k\delta + \pi$$

התאבכות בונה:

$$\delta = \lambda\left(m + \frac{1}{2}\right)$$

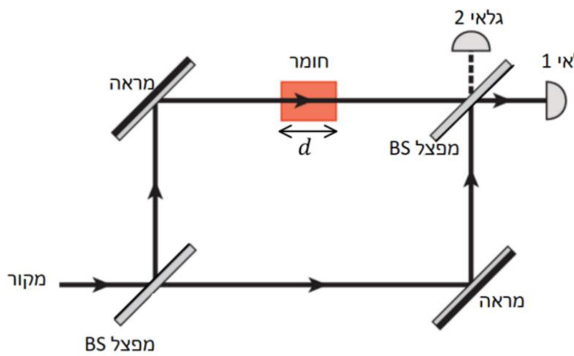
התאבכות הורסת:

$$\delta = \lambda m$$

עוצמה:

$$\frac{I}{I_{max}} = \cos^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right) = \sin^2\left(\frac{\pi\delta}{\lambda}\right)$$

אינטרפרומטר מאך-זנדר:



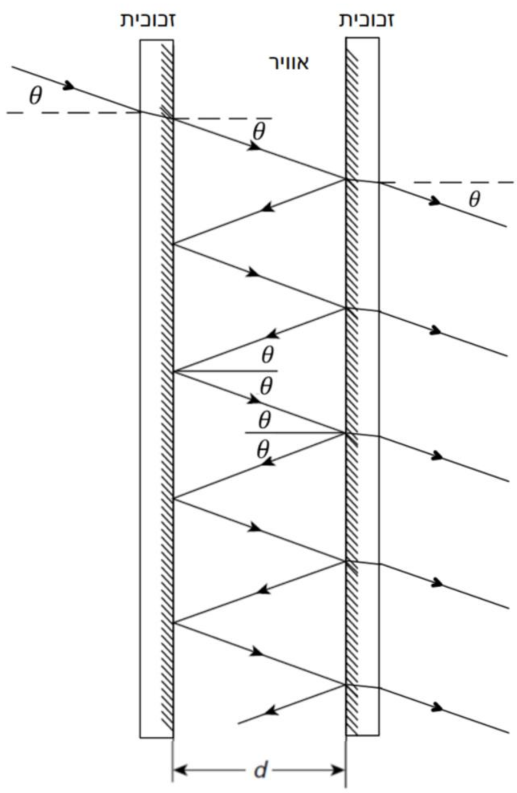
$$\delta = d(n-1)$$

גלאי 1: $\Delta\varphi = k\delta$

גלאי 2: $\Delta\varphi = k\delta + \pi$

עוצמה: $\frac{I}{I_{max}} = \cos^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$

אינטרפרומטר פברי-פרו:



$$\frac{I}{I_{max}} = \frac{1}{1+\frac{4R}{(1-R)^2}\sin^2\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)}$$

$$\Delta\varphi = k\delta = k2d\cos\theta$$

$$R = r^2 = \left(\frac{A_r}{A_i}\right)^2$$

$$\Delta\varphi_{\frac{1}{2}} \approx \frac{1-R}{\sqrt{R}}$$

שאלות

1) ללא פלטה מפצה

נתון אינטרפרומטר מייקלסון עם מפצל (50:50) העשוי מזכוכית בעובי t ומקדם שבירה n_2. זווית המפצל היא 45 מעלות, ציפוי הכסף נמצא בדופן האחורית של הזכוכית (כמו במקרה הרגיל) ובמערכת **אין פלטה מפצה**.

א. מהו הפרש הדרכים האופטיות בין הקרניים?
ומהו הפרש הפאזה עבור אורך גל נתון?
ניתן להניח ששינוי הזווית עקב מעברי התווך במפצל זניח מבחינת אורך הדרך וכי L_1, L_2 גם נתונים.

ב. הניחו שניתן למדוד את העוצמה על המסך.
הראו כי:

$$\lambda = \frac{2\pi\left(L_2 - L_1 - \sqrt{2}t(1-n_2)\right)}{\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{I}{I_{max}}}\right)}$$

ג. כעת הניחו שהופכים את המפצל כך שציפוי הכסף (ופיצול הקרניים) יהיה בדופן הקדמית של הזכוכית.
מה יהיה כעת הפרש הפאזה?

2) גלאי 2

נתון אינטרפרומטר של מאך-זנדר כפי שנראה בסרטון ההסבר.

א. חשבו את הדרך האופטית והפאזה של כל קרן המגיעה לגלאי 2.

ב. חשבו את העוצמה בגלאי 2 והראו כי מתייקם שימור אנרגיה (ביחיד עם העוצמה בגלאי 1).

3) מפצל לא סימטרי

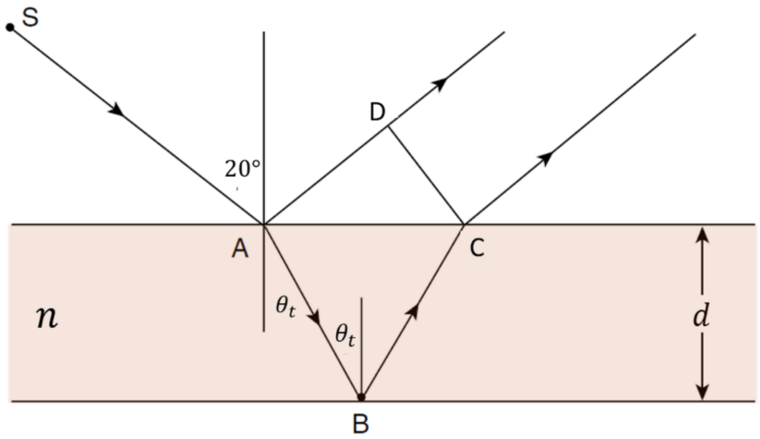
נניח כי המפצל באינטרפרומטר מאך זנדר הוא מפצל לא סימטרי כך שמקדם ההעברה שלו ($\left|\frac{A_t}{A_{in}}\right|$) הוא t ומקדם ההחזרה ($\left|\frac{A_r}{A_{in}}\right|$) הוא r .

א. רשמו את האמפליטודות של כל אחד מהמסלולים האפשריים ביחס לאמפליטודת הכניסה.

ב. * רשמו מטריצה כללית המתארת את המפצל. כולל תוספת הפאזה אך ללא התוספת של הדרכים האופטיות.

4) חישוב עובי קרום דק

גל מישורי לבן פוגע בקרום דק בזווית 20 מעלות. בצפייה של הגל המוחזר רואים אור אדום ($\lambda = 640nm$). מקדם השבירה של הקרום הוא $n = 1.3$.
מהו עובי הקרום? הניחו התאבכות בסדר ראשון.



5) טווחים של מספר גל

נתון אינטרפרומטר של פברי-פרו שבו $R = 0.95$ ו- $d = 0.2mm$ וזווית הפגיעה קטנה מאוד.

א. מה הם אורכי הגל λ_m בהם מתקבלים הפיקים?
מהם הערכים k_m המתאימים?
מה המרחק בין הפיקים במונחי k, כלומר מהו Δk בין שני פיקים?

ב. מהו רוחב הפונקציה (FWHM) כתלות ב- k?
ומהו הרוחב כתלות בתדר?

ג. נתונה דוגמית שערך הרזוננס שלה הוא בטווח של:
$k_r \in [10^3 cm^{-1}, 1.15 \cdot 10^3 cm^{-1}]$.
מהו N עבורו ערך הרזוננס נמצא בטווח של: $k_r \in [k_N, k_{N+1}]$?

ד. בשביל לסרוק את k אנחנו צריכים לשנות את d.
בכמה צריך לשנות את d בשביל לסרוק את הטווח של: $k_r \in [k_N, k_{N+1}]$?

תשובות סופיות

1) א. $\delta = 2\left(L_2 - L_1 - \sqrt{2}t\left(1-n_2\right)\right)$ ב. הוכחה. ג. $\Delta\varphi = 2k\left(L_2 - L_1\right)$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta + \pi$$

2) א. מסלול 3: החזרה במפצל 1 והחזרה במפצל 2 (כניסה לגלאי 2).

דרך אופטית - $L_1 + d\left(n-1\right) + 2c$

$$\varphi_3 = k\left(L_1 + d\left(n-1\right) + 2c\right) + \pi$$

כאשר c הוא הדרך האופטית במפצל.

מסלול 4: העברה במפצל 1 והעברה במפצל 2 (כניסה לגלאי 2).

דרך אופטית - $L_2 + 2c$

$$\varphi_4 = k\left(L_2 + 2c\right)$$

ב. $\frac{I}{I_{\max}} = \sin^2\left(\frac{k\delta}{2}\right)$

$$\delta = L_1 - L_2 + d\left(n-1\right)$$

3) א. $\left|A_1\right| = trE_0, \left|A_2\right| = rtE_0, \left|A_3\right| = r^2E_0, \left|A_4\right| = t^2E_0,$ ב. $\begin{pmatrix} t & -r \\ r & t \end{pmatrix}$

4) $128mm$

5) א. $\lambda_m = \frac{2d}{m}$, $k_m = \frac{\pi m}{d}$, $\Delta k = \frac{\pi}{d}$

ב. $\mathrm{FWHM}_{[F]} = 2.44\cdot 10^{10HZ}$, $\mathrm{FWHM}_{[K]} = 512\cdot\frac{1}{m}$

ג. $N = 6$

ד. $\Delta d = 28\mu m$

תרגילים נוספים

שאלות

1) שני סדקים ברוחב לא זניח

נתונים שני סדקים בעלי רוחב a (שאינו זניח) במרחק d אחד מהשני ובמרחק L מהמסך. הניחו קירוב שדה רחוק וזוויות קטנות.

א. כתבו את הנוסחה המתארת את העוצמה כתלות במרחק ממרכז המסך ביחס לעוצמה המקסימלית. ציינו איזה חלק מהעוצמה הוא פונקציית המעטפת וממה הוא נובע, ואיזה חלק הוא הפונקציה הפנימית (פונקציית המודולציה) וממה הוא נובע.

ב. מהו רוחב פונקציית המעטפת (FWHM) אם נתון שרוחב פונקציית $\sin c^2(\mathrm{x})$ הוא $2.8rad$?

ג. כמה מחזורים של הפונקציה הפנימית נכנסים ברוחב פונקציית המעטפת?

ד. על מנת שנוכל להבחין בהתאבכות של שני הסדקים צריך שיהיו לפחות שני פיקים של הפונקציה הפנימית בתוך הרוחב של פונקציית המעטפת, אחרת נראה רק את פונקציית המעטפת.
מה התנאי על a ו- d כך שנוכל להבחין בהתאבכות הסדקים.

2) שני סדקים עם קיטובים שונים

בניסוי שני הסדקים מסוים הקיטוב של השדה היוצא מכל סדק שונה ונתון לפי: $\vec{E}_1 = E_0\hat{x}$ ו- $\vec{E}_2 = E_0(\cos\varphi\,\hat{x} + \sin\varphi\,\hat{y})$.
הניחו שהמרחק בין הסדקים הוא d והמרחק למסך הוא L וש- $L \gg d$.

א. מה תהיה האמפליטודה של כל אחד מן השדות בפגיעה במרכז המסך? הניחו שהגלים גליליים.

ב. מצאו את השדה השקול והעוצמה במרכז המסך כתלות ב φ.
הסבירו את התוצאות המתקבלות עבור: $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ו- $\varphi = \pi$.

תשובות סופיות

1) א. $\frac{I(x)}{I(0)} = \sin c^2\left(\frac{kax}{2L}\right)\cos^2\left(\frac{kd}{2L}x\right)$

פונקציית המעטפת היא ה- $\sin c$ בריבוע והיא נובעת מרוחב הסדקים.
הפונקציה הפנימית היא הקוסינוס בריבוע והיא נובעת מההתאבכות בין הסדקים.

ב. $\frac{L}{ka}5.6$ ג. $0.89\frac{d}{a}$ ד. $d \approx 2.24a$

2) א. $A_1 = A_2 = \frac{E_0}{\sqrt{L}}$

ב. $E_{tot} = \left((1+\cos\varphi)\hat{x} + \sin\varphi\hat{y}\right)$, $I\alpha\frac{E_0^{\ 2}}{L}4\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

ב- $\varphi = 0$ התאבכות מלאה כי השדות באותו קיטוב

ב- $\varphi = \frac{\pi}{2}$ השדות מאונכים אין התאבכות, העוצמה הכוללת היא סכום העוצמות.

ב- $\varphi = \pi$ השדות בפאזה הפוכה, התאבכות הורסת, עוצמה אפס.